

CHƯƠNG I

MỆNH ĐỀ – TẬP HỢP

I. MỆNH ĐỀ

1. Mệnh đề

- Mệnh đề là một câu khẳng định đúng hoặc một câu khẳng định sai.
- Một mệnh đề không thể vừa đúng, vừa sai.

2. Mệnh đề phủ định

Cho mệnh đề P .

- Mệnh đề "**Không phải P** " đgl **mệnh đề phủ định** của P và kí hiệu là $\overline{P}$.
- Nếu P đúng thì $\overline{P}$ sai, nếu P sai thì $\overline{P}$ đúng.

3. Mệnh đề kéo theo

Cho hai mệnh đề P và Q .

- Mệnh đề "**Nếu P thì Q** " đgl **mệnh đề kéo theo** và kí hiệu là $P \Rightarrow Q$.
- Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ chỉ sai khi P đúng và Q sai.

Chú ý: Các định lý toán học thường có dạng $P \Rightarrow Q$.

- Khi đó:
- P là giả thiết, Q là kết luận;
 - P là điều kiện đủ để có Q ;
 - Q là điều kiện cần để có P .

4. Mệnh đề đảo

Cho mệnh đề kéo theo $P \Rightarrow Q$. Mệnh đề $Q \Rightarrow P$ đgl **mệnh đề đảo** của mệnh đề $P \Rightarrow Q$.

5. Mệnh đề tương đương

Cho hai mệnh đề P và Q .

- Mệnh đề " **P nếu và chỉ nếu Q** " đgl **mệnh đề tương đương** và kí hiệu là $P \Leftrightarrow Q$.
- Mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ đúng khi và chỉ khi cả hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều đúng.

Chú ý: Nếu mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ là một định lý thì ta nói P là **điều kiện cần và đủ để có Q** .

6. Mệnh đề chứa biến

Mệnh đề chứa biến là một câu khẳng định chứa biến nhận giá trị trong một tập X nào đó mà với mỗi giá trị của biến thuộc X ta được một mệnh đề.

7. Kí hiệu $\forall$ và $\exists$

- " $\forall x \in X, P(x)$ "
- " $\exists x \in X, P(x)$ "
- Mệnh đề phủ định của mệnh đề " $\forall x \in X, P(x)$ " là " $\exists x \in X, \overline{P(x)}$ ".
- Mệnh đề phủ định của mệnh đề " $\exists x \in X, P(x)$ " là " $\forall x \in X, \overline{P(x)}$ ".

8. Phép chứng minh phản chứng

Giả sử ta cần chứng minh định lý: $A \Rightarrow B$.

Cách 1: Ta giả thiết A đúng. Dùng suy luận và các kiến thức toán học đã biết chứng minh B đúng.

Cách 2: (Chứng minh phản chứng) Ta giả thiết B sai, từ đó chứng minh A sai. Do A không thể vừa đúng vừa sai nên kết quả là B phải đúng.

9. Bổ sung

Cho hai mệnh đề P và Q .

- Mệnh đề " **P và Q** " đgl **giao** của hai mệnh đề P và Q và kí hiệu là $P \wedge Q$.
- Mệnh đề " **P hoặc Q** " đgl **hợp** của hai mệnh đề P và Q và kí hiệu là $P \vee Q$.
- Phủ định của giao, hợp hai mệnh đề: $\overline{P \wedge Q} = \overline{P} \vee \overline{Q}$, $\overline{P \vee Q} = \overline{P} \wedge \overline{Q}$.

Bài 1. Trong các câu dưới đây, câu nào là mệnh đề, câu nào là mệnh đề chứa biến:

- a) Số 11 là số chẵn.
- b) Bạn có chăm học không ?
- c) Huế là một thành phố của Việt Nam.
- d) $2x + 3$ là một số nguyên dương.
- e) $2 - \sqrt{5} < 0$.
- f) $4 + x = 3$.
- g) Hãy trả lời câu hỏi này!.
- h) Paris là thủ đô nước Ý.
- i) Phương trình $x^2 - x + 1 = 0$ có nghiệm.
- k) 13 là một số nguyên tố.

Bài 2. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là đúng ? Giải thích ?

- a) Nếu a chia hết cho 9 thì a chia hết cho 3.
- b) Nếu $a \geq b$ thì $a^2 \geq b^2$.
- c) Nếu a chia hết cho 3 thì a chia hết cho 6.
- d) Số π lớn hơn 2 và nhỏ hơn 4.
- e) 2 và 3 là hai số nguyên tố cùng nhau.
- f) 81 là một số chính phương.
- g) $5 > 3$ hoặc $5 < 3$.
- h) Số 15 chia hết cho 4 hoặc cho 5.

Bài 3. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là đúng ? Giải thích ?

- a) Hai tam giác bằng nhau khi và chỉ khi chúng có diện tích bằng nhau.
- b) Hai tam giác bằng nhau khi và chỉ khi chúng đồng dạng và có một cạnh bằng nhau.
- c) Một tam giác là tam giác đều khi và chỉ khi chúng có hai đường trung tuyến bằng nhau và có một góc bằng 60° .
- d) Một tam giác là tam giác vuông khi và chỉ khi nó có một góc bằng tổng của hai góc còn lại.
- e) Đường tròn có một tâm đối xứng và một trục đối xứng.
- f) Hình chữ nhật có hai trục đối xứng.
- g) Một tứ giác là hình thoi khi và chỉ khi nó có hai đường chéo vuông góc với nhau.
- h) Một tứ giác nội tiếp được đường tròn khi và chỉ khi nó có hai góc vuông.

Bài 4. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là đúng ? Giải thích ? Phát biểu các mệnh đề đó thành lời:

- a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$.
- b) $\exists x \in \mathbb{R}, x > x^2$
- c) $\exists x \in \mathbb{Q}, 4x^2 - 1 = 0$.
- d) $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 > n$.
- e) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x = 1 > 0$
- f) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 9 \Rightarrow x > 3$
- g) $\forall x \in \mathbb{R}, x > 3 \Rightarrow x^2 > 9$.
- h) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 < 5 \Rightarrow x < \sqrt{5}$
- i) $\exists x \in \mathbb{R}, 5x - 3x^2 \leq 1$
- k) $\exists x \in \mathbb{N}, x^2 + 2x + 5$ là hợp số.
- l) $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 + 1$ không chia hết cho 3.
- m) $\forall n \in \mathbb{N}^*, n(n+1)$ là số lẻ.
- n) $\forall n \in \mathbb{N}^*, n(n+1)(n+2)$ chia hết cho 6.

Bài 5. Điền vào chỗ trống từ nói "và" hay "hoặc" để được mệnh đề đúng:

- a) $\pi < 4 \dots \pi > 5$.
- b) $ab = 0$ khi $a = 0 \dots b = 0$.
- c) $ab \neq 0$ khi $a \neq 0 \dots b \neq 0$
- d) $ab > 0$ khi $a > 0 \dots b > 0 \dots a < 0 \dots b < 0$.
- e) Một số chia hết cho 6 khi và chỉ khi nó chia hết cho 2 cho 3.
- f) Một số chia hết cho 5 khi và chỉ khi chữ số tận cùng của nó bằng 0 bằng 5.

Bài 6. Cho mệnh đề chứa biến $P(x)$, với $x \in \mathbb{R}$. Tìm x để $P(x)$ là mệnh đề đúng:

- a) $P(x): "x^2 - 5x + 4 = 0"$
- b) $P(x): "x^2 - 5x + 6 = 0"$
- c) $P(x): "x^2 - 3x > 0"$
- d) $P(x): "\sqrt{x} \geq x"$
- e) $P(x): "2x + 3 \leq 7"$
- f) $P(x): "x^2 + x + 1 > 0"$

Bài 7. Nêu mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau:

- a) Số tự nhiên n chia hết cho 2 và cho 3.
- b) Số tự nhiên n có chữ số tận cùng bằng 0 hoặc bằng 5.
- c) Tứ giác T có hai cạnh đối vừa song song vừa bằng nhau.
- d) Số tự nhiên n có ước số bằng 1 và bằng n .

Bài 8. Nêu mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau:

- a) $\forall x \in \mathbb{R}: x^2 > 0$.
- b) $\exists x \in \mathbb{R}: x > x^2$.
- c) $\exists x \in \mathbb{Q}: 4x^2 - 1 = 0$.
- d) $\forall x \in \mathbb{R}: x^2 - x + 7 > 0$.

- e) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 - x - 2 < 0$. f) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 3$.
g) $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 + 1$ không chia hết cho 3. h) $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 + 2n + 5$ là số nguyên tố.
i) $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 + n$ chia hết cho 2. k) $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 - 1$ là số lẻ.

Bài 9. Phát biểu các mệnh đề sau, bằng cách sử dụng khái niệm "điều kiện cần", "điều kiện đủ":

- a) Nếu một số tự nhiên có chữ số tận cùng là chữ số 5 thì nó chia hết cho 5.
b) Nếu $a + b > 0$ thì một trong hai số a và b phải dương.
c) Nếu một số tự nhiên chia hết cho 6 thì nó chia hết cho 3.
d) Nếu $a = b$ thì $a^2 = b^2$.
e) Nếu a và b cùng chia hết cho c thì $a + b$ chia hết cho c .

Bài 10. Phát biểu các mệnh đề sau, bằng cách sử dụng khái niệm "điều kiện cần", "điều kiện đủ":

- a) Trong mặt phẳng, nếu hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì hai đường thẳng ấy song song với nhau.
b) Nếu hai tam giác bằng nhau thì chúng có diện tích bằng nhau.
c) Nếu tứ giác T là một hình thoi thì nó có hai đường chéo vuông góc với nhau.
d) Nếu tứ giác H là một hình chữ nhật thì nó có ba góc vuông.
e) Nếu tam giác K đều thì nó có hai góc bằng nhau.

Bài 11. Phát biểu các mệnh đề sau, bằng cách sử dụng khái niệm "điều kiện cần và đủ":

- a) Một tam giác là vuông khi và chỉ khi nó có một góc bằng tổng hai góc còn lại.
b) Một tứ giác là hình chữ nhật khi và chỉ khi nó có ba góc vuông.
c) Một tứ giác là nội tiếp được trong đường tròn khi và chỉ khi nó có hai góc đối bù nhau.
d) Một số chia hết cho 6 khi và chỉ khi nó chia hết cho 2 và cho 3.
e) Số tự nhiên n là số lẻ khi và chỉ khi n^2 là số lẻ.

Bài 12. Chứng minh các mệnh đề sau bằng phương pháp phản chứng:

- a) Nếu $a + b < 2$ thì một trong hai số a và b nhỏ hơn 1.
b) Một tam giác không phải là tam giác đều thì nó có ít nhất một góc nhỏ hơn 60° .
c) Nếu $x \neq -1$ và $y \neq -1$ thì $x + y + xy \neq -1$.
d) Nếu bình phương của một số tự nhiên n là một số chẵn thì n cũng là một số chẵn.
e) Nếu tích của hai số tự nhiên là một số lẻ thì tổng của chúng là một số chẵn.
f) Nếu một tứ giác có tổng các góc đối diện bằng hai góc vuông thì tứ giác đó nội tiếp được đường tròn.
g) Nếu $x^2 + y^2 = 0$ thì $x = 0$ và $y = 0$.

II. TẬP HỢP

1. Tập hợp

- **Tập hợp** là một khái niệm cơ bản của toán học, không định nghĩa.
- **Cách xác định tập hợp:**
 - + Liệt kê các phần tử: viết các phần tử của tập hợp trong hai dấu móc $\{ \dots \}$.
 - + Chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp.
- **Tập rỗng:** là tập hợp không chứa phần tử nào, kí hiệu $\emptyset$.

2. Tập hợp con – Tập hợp bằng nhau

- $A \subset B \Leftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B)$
 $+ A \subset A, \forall A \quad + \emptyset \subset A, \forall A \quad + A \subset B, B \subset C \Rightarrow A \subset C$
- $A = B \Leftrightarrow (A \subset B \text{ và } B \subset A)$

3. Một số tập con của tập hợp số thực

- $N^* \subset N \subset Z \subset Q \subset R$
- Khoảng: $(a; b) = \{x \in R | a < x < b\}$; $(a; +\infty) = \{x \in R | a < x\}$; $(-\infty; b) = \{x \in R | x < b\}$
- Đoạn: $[a; b] = \{x \in R | a \leq x \leq b\}$
- Nửa khoảng: $[a; b) = \{x \in R | a \leq x < b\}$; $(a; b] = \{x \in R | a < x \leq b\}$;
 $[a; +\infty) = \{x \in R | a \leq x\}$; $(-\infty; b] = \{x \in R | x \leq b\}$

4. Các phép toán tập hợp

- **Giao của hai tập hợp:** $A \cap B \Leftrightarrow \{x | x \in A \text{ và } x \in B\}$
- **Hợp của hai tập hợp:** $A \cup B \Leftrightarrow \{x | x \in A \text{ hoặc } x \in B\}$
- **Hiệu của hai tập hợp:** $A \setminus B \Leftrightarrow \{x | x \in A \text{ và } x \notin B\}$
- **Phần bù:** Cho $B \subset A$ thì ${}_A C B = A \setminus B$.

Bài 1. Viết mỗi tập hợp sau bằng cách liệt kê các phần tử của nó:

$$A = \{x \in R | (2x^2 - 5x + 3)(x^2 - 4x + 3) = 0\} \quad B = \{x \in R | (x^2 - 10x + 21)(x^3 - x) = 0\}$$

$$C = \{x \in R | (6x^2 - 7x + 1)(x^2 - 5x + 6) = 0\} \quad D = \{x \in Z | 2x^2 - 5x + 3 = 0\}$$

$$E = \{x \in N | x + 3 < 4 + 2x \text{ và } 5x - 3 < 4x - 1\} \quad F = \{x \in Z | |x + 2| \leq 1\}$$

$$G = \{x \in N | x < 5\} \quad H = \{x \in R | x^2 + x + 3 = 0\}$$

Bài 2. Viết mỗi tập hợp sau bằng cách chỉ rõ tính chất đặc trưng cho các phần tử của nó:

$$A = \{0; 1; 2; 3; 4\} \quad B = \{0; 4; 8; 12; 16\} \quad C = \{-3; 9; -27; 81\}$$

$$D = \{9; 36; 81; 144\} \quad E = \{2, 3, 5, 7, 11\} \quad F = \{3, 6, 9, 12, 15\}$$

G = Tập tất cả các điểm thuộc đường trung trực của đoạn thẳng AB .

H = Tập tất cả các điểm thuộc đường tròn tâm I cho trước và có bán kính bằng 5.

Bài 3. Trong các tập hợp sau đây, tập nào là tập rỗng:

$$A = \{x \in Z | |x| < 1\} \quad B = \{x \in R | x^2 - x + 1 = 0\} \quad C = \{x \in Q | x^2 - 4x + 2 = 0\}$$

$$D = \{x \in Q | x^2 - 2 = 0\} \quad E = \{x \in N | x^2 + 7x + 12 = 0\} \quad F = \{x \in R | x^2 - 4x + 2 = 0\}$$

Bài 4. Tìm tất cả các tập con, các tập con gồm hai phần tử của các tập hợp sau:

$$A = \{1, 2\} \quad B = \{1, 2, 3\} \quad C = \{a, b, c, d\}$$

III. SỐ GẦN ĐÚNG – SAI SỐ

1. Số gần đúng

Trong đo đạc, tính toán ta thường chỉ nhận được các số gần đúng.

2. Sai số tuyệt đối

Nếu a là số gần đúng của số đúng $\bar{a}$ thì $\Delta_a = |\bar{a} - a|$ đgl **sai số tuyệt đối** của số gần đúng a .

3. Độ chính xác của một số gần đúng

Nếu $\Delta_a = |\bar{a} - a| \leq d$ thì $a - d \leq \bar{a} \leq a + d$. Ta nói a là số gần đúng của $\bar{a}$ với **độ chính xác d** , và qui ước viết gọn là $\bar{a} = a \pm d$.

4. Sai số tương đối

Sai số tương đối của số gần đúng a là tỉ số giữa sai số tuyệt đối và $|a|$, kí hiệu $\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|}$.

- δ_a càng nhỏ thì độ chính xác của phép đo đạc hoặc tính toán càng lớn.
- Ta thường viết δ_a dưới dạng phần trăm.

5. Qui tròn số gần đúng

- Nếu chữ số ngay sau hàng qui tròn nhỏ hơn 5 thì ta chỉ việc thay thế chữ số đó và các chữ số bên phải nó bởi số 0.
- Nếu chữ số ngay sau hàng qui tròn lớn hơn hay bằng 5 thì ta thay thế chữ số đó và các chữ số bên phải nó bởi số 0 và cộng thêm một đơn vị vào chữ số ở hàng qui tròn.

Nhận xét: Khi thay số đúng bởi số qui tròn đến một hàng nào đó thì sai số tuyệt đối của số qui tròn không vượt quá nửa đơn vị của hàng qui tròn. Như vậy, độ chính xác của số qui tròn bằng nửa đơn vị của hàng qui tròn.

6. Chữ số chắc

Cho số gần đúng a của số $\bar{a}$ với độ chính xác d . Trong số a , một chữ số đgl **chữ số chắc** (hay **đáng tin**) nếu d không vượt quá nửa đơn vị của hàng có chữ số đó.

Nhận xét: Tất cả các chữ số đứng bên trái chữ số chắc đều là chữ số chắc. Tất cả các chữ số đứng bên phải chữ số không chắc đều là chữ số không chắc.

CHƯƠNG II HÀM SỐ BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI

I. HÀM SỐ

1. Định nghĩa

- Cho $D \subset \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$. **Hàm số f** xác định trên D là một qui tắc đặt tương ứng mỗi số $x \in D$ với một và chỉ một số $y \in \mathbb{R}$.
- x đgl **biến số** (đối số), y đgl **giá trị** của hàm số f tại x . Kí hiệu: $y = f(x)$.
- D đgl tập xác định của hàm số.
- $T = \{y = f(x) | x \in D\}$ đgl tập giá trị của hàm số.

2. Cách cho hàm số

- Cho bằng bảng
 - Cho bằng biểu đồ
 - Cho bằng công thức $y = f(x)$.
- Tập xác định của hàm số $y = f(x)$** là tập hợp tất cả các số thực x sao cho biểu thức $f(x)$ có nghĩa.

3. Đồ thị của hàm số

Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D là tập hợp tất cả các điểm $M(x; f(x))$ trên mặt phẳng tọa độ với mọi $x \in D$.

Chú ý: Ta thường gặp đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là một đường. Khi đó ta nói $y = f(x)$ là **phương trình** của đường đó.

4. Sự biến thiên của hàm số

Cho hàm số f xác định trên K .

• Hàm số $y = f(x)$ **đồng biến (tăng)** trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

• Hàm số $y = f(x)$ **nghịch biến (giảm)** trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

5. Tính chẵn lẻ của hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định D .

• Hàm số f đgl **hàm số chẵn** nếu với $\forall x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = f(x)$.

• Hàm số f đgl **hàm số lẻ** nếu với $\forall x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = -f(x)$.

Chú ý: + Đồ thị của hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng.

+ Đồ thị của hàm số lẻ nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.

VẤN ĐỀ 1: Tìm tập xác định của hàm số

• Tìm tập xác định D của hàm số $y = f(x)$ là tìm tất cả những giá trị của biến số x sao cho biểu thức $f(x)$ có nghĩa: $D = \{x \in R \mid f(x) \text{ có nghĩa}\}$.

• Điều kiện xác định của một số hàm số thường gặp:

1) Hàm số $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$: Điều kiện xác định: $Q(x) \neq 0$.

2) Hàm số $y = \sqrt{R(x)}$: Điều kiện xác định: $R(x) \geq 0$.

Chú ý: + Đôi khi ta sử dụng phối hợp các điều kiện với nhau.

+ Điều kiện để hàm số xác định trên tập A là $A \subset D$.

$$+ A.B \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A \neq 0 \\ B \neq 0 \end{cases}$$

Bài 1. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \frac{4}{x+4}$

b) $y = \frac{x-3}{5-2x}$

c) $y = \frac{x}{x^2-3x+2}$

d) $y = \frac{3x}{x^2+x+1}$

e) $y = \frac{x-1}{2x^2-5x+2}$

f) $y = \frac{x-1}{x^3+1}$

g) $y = \frac{3}{1-x^2} + \frac{x}{x+1}$

h) $y = \frac{2x+1}{(x-2)(x^2-4x+3)}$

i) $y = \frac{1}{x^4+2x^2-3}$

j) $y = \frac{x}{3x-1} - \frac{4x+1}{x^2+3x}$

k) $y = \frac{5x+1}{9x^4-6x^3+x^2}$

l) $y = \frac{1}{7x} + \frac{1-2x}{(4x+1)^2-25}$

Bài 2. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \sqrt{2x-3}$

b) $y = \sqrt{|2x-3|}$

c) $y = \sqrt{4-x} + \sqrt{x+1}$

d) $y = \sqrt{x-1} + \frac{1}{x-3}$

e) $y = \frac{1}{(x+2)\sqrt{x-1}}$

f) $y = \sqrt{x+3-2\sqrt{x+2}}$

$$g) y = \frac{\sqrt{5-2x}}{(x-2)\sqrt{x-1}}$$

$$h) y = \sqrt{2x-1} + \sqrt{\frac{1}{3-x}}$$

$$i) y = \sqrt{x+3} + \frac{1}{x^2-4}$$

$$j) y = \frac{8x}{\sqrt{-x}} + \frac{x-2}{\sqrt{1-x}}$$

$$k) y = \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{3-x}}{x^2-5x+4}$$

$$l) y = \frac{\sqrt{x^2+4x+5}}{|x^2+4x-2| - |5-2x|}$$

Bài 3. Tìm a để hàm số xác định trên tập K đã chỉ ra:

$$a) y = \frac{2x+1}{x^2-6x+a-2};$$

$$K = \mathbb{R}.$$

$$ĐS: a > 11$$

$$b) y = \frac{3x+1}{x^2-2ax+4};$$

$$K = \mathbb{R}.$$

$$ĐS: -2 < a < 2$$

$$c) y = \sqrt{x-a} + \sqrt{2x-a-1}; \quad K = (0; +\infty).$$

$$ĐS: a \leq 1$$

$$d) y = \sqrt{2x-3a+4} + \frac{x-a}{x+a-1}; \quad K = (0; +\infty).$$

$$ĐS: 1 \leq a \leq \frac{4}{3}$$

$$e) y = \frac{x+2a}{x-a+1};$$

$$K = (-1; 0).$$

$$ĐS: a \leq 0 \text{ hoặc } a \geq 1$$

$$f) y = \frac{1}{\sqrt{x-a}} + \sqrt{-x+2a+6}; K = (-1; 0).$$

$$ĐS: -3 \leq a \leq -1$$

$$e) y = \sqrt{2x+a+1} + \frac{1}{x-a}; \quad K = (1; +\infty).$$

$$ĐS: -1 \leq a \leq 1$$

VẤN ĐỀ 2: Xét tính chẵn lẻ của hàm số

Để xét tính chẵn lẻ của hàm số $y = f(x)$ ta tiến hành các bước như sau:

• Tìm tập xác định D của hàm số và xét xem D có là tập đối xứng hay không.

• Nếu D là tập đối xứng thì so sánh $f(-x)$ với $f(x)$ (x bất kì thuộc D).

+ Nếu $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in D$ thì f là hàm số chẵn.

+ Nếu $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in D$ thì f là hàm số lẻ.

Chú ý: + **Tập đối xứng** là tập thỏa mãn điều kiện: Với $\forall x \in D$ thì $-x \in D$.

+ Nếu $\exists x \in D$ mà $f(-x) \neq \pm f(x)$ thì f là hàm số không chẵn không lẻ.

Bài 1. Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau:

$$a) y = 3x^2 - 5$$

$$b) y = -2x^3 + 3x$$

$$c) y = x^4 - 4x^2 + 2$$

$$d) y = |2x+1| + |2x-1|$$

$$e) y = (x-1)^2$$

$$f) y = x^2 + x$$

$$g) y = \frac{x^2+4}{x^4}$$

$$h) y = \frac{2x^3-5x}{x^2-4}$$

$$i) y = 2x^2 - |x|$$

$$j) y = |x+2| - |x-2|$$

$$k) y = \frac{|x+1| + |x-1|}{|x+1| - |x-1|}$$

$$l) y = |3x + x^3|$$

$$m) y = \frac{|2021x|}{x^2 - 2|x| - 3}$$

$$n) y = \sqrt{4-x^2}$$

$$o) y = (2x-3)^2 + (2x+3)^2$$

$$p) y = \sqrt{2-x} + \sqrt{3+x}$$

$$r) y = \sqrt{4-x} + \sqrt{4+x}$$

$$s) y = \sqrt{1-2x} - \sqrt{1+2x}$$

Bài 2. Tìm m để:

- a) $y = f(x) = mx^3 - (m^2 + 2m - 3)x^2 + 2021x$ có đồ thị nhận tâm O làm tâm đối xứng
- b) $y = f(x) = x^4 - m(m-1)x^3 + x^2 + mx + m^2$ có đồ thị nhận trục tung làm trục đối xứng.

II. HÀM SỐ BẬC NHẤT

1. Hàm số bậc nhất $y = ax + b$ ($a \neq 0$)

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.
- Sự biến thiên: + Khi $a > 0$, hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
+ Khi $a < 0$, hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
- Đồ thị là đường thẳng có hệ số góc bằng a , cắt trục tung tại điểm $B(0; b)$.

Chú ý: Cho hai đường thẳng $(d): y = ax + b$ và $(d'): y = a'x + b'$:

- + (d) song song với $(d') \Leftrightarrow a = a'$ và $b \neq b'$.
- + (d) trùng với $(d') \Leftrightarrow a = a'$ và $b = b'$.
- + (d) cắt $(d') \Leftrightarrow a \neq a'$.

2. Hàm số $y = |ax + b|$ ($a \neq 0$)

$$y = |ax + b| = \begin{cases} ax + b & \text{khi } x \geq -\frac{b}{a} \\ -(ax + b) & \text{khi } x < -\frac{b}{a} \end{cases}$$

Chú ý: Để vẽ đồ thị của hàm số $y = |ax + b|$ ta có thể vẽ hai đường thẳng $y = ax + b$ và $y = -ax - b$, rồi xoá đi hai phần đường thẳng nằm ở phía dưới trục hoành.

Bài 1. Vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a) $y = 2x - 7$ b) $y = -3x + 5$ c) $y = \frac{x-3}{2}$ d) $y = \frac{5-x}{3}$

Bài 2. Tìm tọa độ giao điểm của các cặp đường thẳng sau:

a) $y = 3x - 2$; $y = 2x + 3$ b) $y = -3x + 2$; $y = 4(x - 3)$

c) $y = 2x$; $y = -x - 3$ d) $y = \frac{x-3}{2}$; $y = \frac{5-x}{3}$

Bài 3. Trong mỗi trường hợp sau, tìm giá trị k để đồ thị của hàm số $y = -2x + k(x + 1)$:

- a) Đi qua gốc tọa độ O b) Đi qua điểm $M(-2; 3)$
- c) Song song với đường thẳng $y = \sqrt{2}x$

Bài 4. Xác định a và b để đồ thị của hàm số $y = ax + b$:

- a) Đi qua hai điểm $A(-1; -20)$, $B(3; 8)$.
- b) Đi qua điểm $M(4; -3)$ và song song với đường thẳng $d: y = -\frac{2}{3}x + 1$.
- c) Cắt đường thẳng $d_1: y = 2x + 5$ tại điểm có hoành độ bằng -2 và cắt đường thẳng $d_2: y = -3x + 4$ tại điểm có tung độ bằng -2 .
- d) Song song với đường thẳng $y = \frac{1}{2}x$ và đi qua giao điểm của hai đường thẳng $y = -\frac{1}{2}x + 1$ và $y = 3x + 5$.

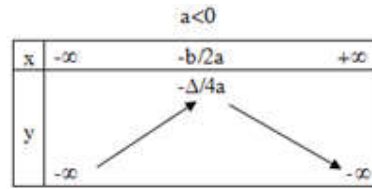
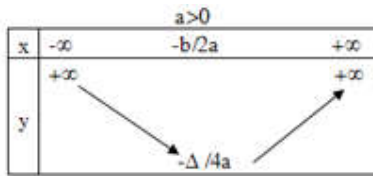
Bài 5. Trong mỗi trường hợp sau, tìm các giá trị của m sao cho ba đường thẳng sau phân biệt và đồng quy:

- a) $y = 2x$; $y = -x - 3$; $y = mx + 5$
b) $y = -5(x + 1)$; $y = mx + 3$; $y = 3x + m$
c) $y = 2x - 1$; $y = 8 - x$; $y = (3 - 2m)x + 2$
d) $y = (5 - 3m)x + m - 2$; $y = -x + 11$; $y = x + 3$
e) $y = -x + 5$; $y = 2x - 7$; $y = (m - 2)x + m^2 + 4$

III. HÀM SỐ BẬC HAI

$$y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$
- Sự biến thiên:



- Đồ thị là một parabol có đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$, nhận đường thẳng $x = -\frac{b}{2a}$ làm trục đối xứng, hướng bề lõm lên trên khi $a > 0$, xuống dưới khi $a < 0$.

Chú ý: Để vẽ đường parabol ta có thể thực hiện các bước như sau:

- Xác định tọa độ đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.
- Xác định trục đối xứng $x = -\frac{b}{2a}$ và hướng bề lõm của parabol.
- Xác định một số điểm cụ thể của parabol (chẳng hạn, giao điểm của parabol với các trục tọa độ và các điểm đối xứng với chúng qua trục trục đối xứng).
- Căn cứ vào tính đối xứng, bề lõm và hình dáng parabol để vẽ parabol.

Bài 1. Xét sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số sau:

- a) $y = x^2 - 2x$ b) $y = -x^2 + 2x + 3$ c) $y = -x^2 + 2x - 2$
d) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 2$ e) $y = x^2 - 4x + 4$ f) $y = -x^2 - 4x + 1$

Bài 2. Tìm tọa độ giao điểm (nếu có) của các cặp đồ thị của các hàm số sau:

- a) $y = x - 1$; $y = x^2 - 2x - 1$ b) $y = -x + 3$; $y = -x^2 - 4x + 1$
c) $y = 2x - 5$; $y = x^2 - 4x + 4$ d) $y = x^2 - 2x - 1$; $y = x^2 - 4x + 4$
e) $y = 3x^2 - 4x + 1$; $y = -3x^2 + 2x - 1$ f) $y = 2x^2 + x + 1$; $y = -x^2 + x - 1$

Bài 3. Xác định parabol (P) biết:

- a) (P): $y = ax^2 + bx + 2$ đi qua điểm $A(1; 0)$ và có trục đối xứng $x = \frac{3}{2}$.
b) (P): $y = ax^2 + bx + 3$ đi qua điểm $A(-1; 9)$ và có trục đối xứng $x = -2$.
c) (P): $y = ax^2 + bx + c$ đi qua điểm $A(0; 5)$ và có đỉnh $I(3; -4)$.
d) (P): $y = ax^2 + bx + c$ đi qua điểm $A(2; -3)$ và có đỉnh $I(1; -4)$.
e) (P): $y = ax^2 + bx + c$ đi qua các điểm $A(1; 1)$, $B(-1; -3)$, $O(0; 0)$.

f) (P): $y = x^2 + bx + c$ đi qua điểm A(1; 0) và đỉnh I có tung độ bằng -1.

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG II

Bài 1. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \sqrt{2-x} - \frac{4}{\sqrt{x+4}}$

b) $y = \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{x}$

c)

$y = \frac{3x^2 - x}{|x^2 - x| + |x - 1|}$

d) $y = \frac{x^2 + \sqrt{2x+3}}{2 - \sqrt{5-x}}$

e) $y = \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{3-2x}}{|x| - 1}$

f) $y = \frac{2x-1}{\sqrt{x|x|-4}}$

Bài 2. Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau:

a) $y = \frac{x^4 + x^2 - 2}{x^2 - 1}$

b) $y = \sqrt{3+x} + \sqrt{3-x}$

c) $y = x(x^2 + 2|x|)$

d) $y = \frac{|x+1| + |x-1|}{|x+1| - |x-1|}$

e) $y = \frac{|x|^3 x}{x^2 + 1}$

f) $y = \sqrt{x-2}$

Bài 3. Giả sử $y = f(x)$ là hàm số xác định trên tập đối xứng D. Chứng minh rằng:

a) Hàm số $F(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$ là hàm số chẵn xác định trên D.

b) Hàm số $G(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$ là hàm số lẻ xác định trên D.

c) Hàm số $f(x)$ có thể phân tích thành tổng của một hàm số chẵn và một hàm số lẻ.

Bài 4. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ (P). Tìm a, b, c

- Tìm a, b, c thỏa điều kiện được chỉ ra.
- Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (P) của hàm số vừa tìm được.
- Tìm m để đường thẳng d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B. Xác định tọa độ trung điểm I của đoạn AB.

a) (P) có đỉnh $S\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$ và đi qua điểm A(1; 1); d: $y = mx$.

b) (P) có đỉnh S(1; 1) và đi qua điểm A(0; 2); d: $y = 2x + m$.

CHƯƠNG III PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH

I. ĐẠI CƯƠNG VỀ PHƯƠNG TRÌNH

1. Phương trình một ẩn $f(x) = g(x)$ (1)

- x_0 là một **nghiệm** của (1) nếu " $f(x_0) = g(x_0)$ " là một mệnh đề đúng.
- Giải phương trình là tìm **tất cả** các nghiệm của phương trình đó.
- Khi giải phương trình ta thường tìm **điều kiện xác định** của phương trình.

Chú ý:

+ Khi tìm ĐKXD của phương trình, ta thường gặp các trường hợp sau:

– Nếu trong phương trình có chứa biểu thức $\frac{1}{P(x)}$ thì cần điều kiện $P(x) \neq 0$.

– Nếu trong phương trình có chứa biểu thức $\sqrt{P(x)}$ thì cần điều kiện $P(x) \geq 0$.

+ Các nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ là hoành độ các giao điểm của đồ thị hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$.

2. Phương trình tương đương, phương trình hệ quả

Cho hai phương trình $f_1(x) = g_1(x)$ (1) có tập nghiệm S_1
và $f_2(x) = g_2(x)$ (2) có tập nghiệm S_2 .

• $(1) \Leftrightarrow (2)$ khi và chỉ khi $S_1 = S_2$.

• $(1) \Rightarrow (2)$ khi và chỉ khi $S_1 \subset S_2$.

3. Phép biến đổi tương đương

• Nếu một phép biến đổi phương trình mà không làm thay đổi điều kiện xác định của nó thì ta được một phương trình tương đương. Ta thường sử dụng các phép biến đổi sau:

– Cộng hai vế của phương trình với cùng một biểu thức.

– Nhân hai vế của phương trình với một biểu thức có giá trị khác 0.

• Khi **biến phương** hai vế của một phương trình, nói chung ta được một phương trình **hệ quả**. Khi đó ta phải kiểm tra lại để loại bỏ **nghiệm ngoại lai**.

Bài 13. Tìm điều kiện xác định của mỗi phương trình và giải phương trình đó:

a) $3x + \frac{5}{x-4} = 12 + \frac{5}{x-4}$

b) $5x + \frac{1}{x+3} = 15 + \frac{1}{x+3}$

c) $x^2 - \frac{1}{x-1} = 9 - \frac{1}{x-1}$

d) $3x + \frac{2}{x-5} = 15 + \frac{2}{x-5}$

Bài 14. Tìm điều kiện xác định của mỗi phương trình và giải phương trình đó:

a) $1 + \sqrt{1-x} = \sqrt{x-2}$

b) $\sqrt{x+1} = \sqrt{2-x}$

c) $\sqrt{x+1} = x+1$

d) $\sqrt{x-1} = 1-x$

e) $\frac{x}{\sqrt{x-1}} = \frac{3}{\sqrt{x-1}}$

f) $x^2 - \sqrt{1-x} = \sqrt{x-2} + 3$

Bài 15. Tìm điều kiện xác định của mỗi phương trình và giải phương trình đó:

a) $\sqrt{x-3}(x^2-3x+2) = 0$

b) $\sqrt{x+1}(x^2-x-2) = 0$

c) $\frac{x}{\sqrt{x-2}} = \frac{1}{\sqrt{x-2}} - \sqrt{x-2}$

d) $\frac{x^2-4}{\sqrt{x+1}} = \frac{x+3}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+1}$

Bài 16. Tìm điều kiện xác định của mỗi phương trình và giải phương trình đó:

a) $|x-2| = x+1$

b) $|x+1| = x-2$

c) $2|x-1| = x+2$

d) $|x-2| = 2x-1$

Bài 17. Tìm điều kiện xác định của mỗi phương trình và giải phương trình đó:

a) $\frac{|x|}{\sqrt{x-1}} = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$

b) $\frac{|x-2|}{\sqrt{x-1}} = \frac{x-2}{\sqrt{x-1}}$

c) $\frac{|x|}{\sqrt{2-x}} = \frac{x}{\sqrt{2-x}}$

d) $\frac{|x-1|}{\sqrt{x-2}} = \frac{1-x}{\sqrt{x-2}}$

II. PHƯƠNG TRÌNH $ax + b = 0$

$ax + b = 0 \quad (1)$		
Hệ số		Kết luận
$a \neq 0$		(1) có nghiệm duy nhất $x = -\frac{b}{a}$
$a = 0$	$b \neq 0$	(1) vô nghiệm
	$b = 0$	(1) nghiệm đúng với mọi x

Chú ý: Khi $a \neq 0$ thì (1) đgl phương trình bậc nhất một ẩn.

Bài 1. Giải và biện luận các phương trình sau theo tham số m :

- a) $(m^2 + 2)x - 2m = x - 3$ b) $m(x - m) = x + m - 2$
 b) $m(x - m + 3) = m(x - 2) + 6$ d) $m^2(x - 1) + m = x(3m - 2)$
 e) $(m^2 - m)x = 2x + m^2 - 1$ f) $(m + 1)^2 x = (2m + 5)x + 2 + m$

Bài 2. Trong các phương trình sau, tìm giá trị của tham số để phương trình:

- i) Có nghiệm duy nhất ii) Vô nghiệm iii) Nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.
 a) $(m - 2)x = n - 1$ b) $(m^2 + 2m - 3)x = m - 1$
 c) $(mx + 2)(x + 1) = (mx + m^2)x$ d) $(m^2 - m)x = 2x + m^2 - 1$

III. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

1. Cách giải

$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0) \quad (1)$	
$\Delta = b^2 - 4ac$	Kết luận
$\Delta > 0$	(1) có 2 nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
$\Delta = 0$	(1) có nghiệm kép $x = -\frac{b}{2a}$
$\Delta < 0$	(1) vô nghiệm

Chú ý: – Nếu $a + b + c = 0$ thì (1) có hai nghiệm là $x = 1$ và $x = \frac{c}{a}$.

– Nếu $a - b + c = 0$ thì (1) có hai nghiệm là $x = -1$ và $x = -\frac{c}{a}$.

– Nếu b chẵn thì ta có thể dùng công thức thu gọn với $b' = \frac{b}{2}$.

2. Định lý Vi-et

Hai số x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ khi và chỉ khi chúng thoả mãn các hệ thức $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ và $P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

VẤN ĐỀ 1: Giải và biện luận phương trình $ax^2 + bx + c = 0$

Để giải và biện luận phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ta cần xét các trường hợp có thể xảy ra của hệ số a :

- Nếu $a = 0$ thì trở về giải và biện luận phương trình $bx + c = 0$.
- Nếu $a \neq 0$ thì mới xét các trường hợp của Δ như trên.

Bài 1. Giải và biện luận các phương trình sau:

- a) $x^2 + 5x + 3m - 1 = 0$ b) $2x^2 + 12x - 15m = 0$
 c) $x^2 - 2(m-1)x + m^2 = 0$ d) $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + m - 2 = 0$
 e) $(m-1)x^2 + (2-m)x - 1 = 0$ f) $mx^2 - 2(m+3)x + m + 1 = 0$

Bài 2. Tìm m để phương trình sau có nghiệm kép

- a) $x^2 - 2(m-1)x + 2m + 1 = 0$ c) $(1+4m)x^2 - 4mx + m - 3 = 0$
 b) $mx^2 + 2(m+3)x + m + 1 = 0$ d) $(m-2)x^2 - mx + 2m - 3 = 0$

Bài 3. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt

- a) $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3m + 4 = 0$ c) $(m-1)x^2 + 4x - (m+4) = 0$
 b) $(m+1)x^2 - (2m+8)x + m - 4 = 0$ d) $(m+2)x^2 - 2(m+3)x + 5m = 0$
 e)

Bài 4. Cho biết một nghiệm của phương trình. Tìm nghiệm còn lại:

- a) $x^2 - mx + m + 1 = 0$; $x = -\frac{3}{2}$ b) $2x^2 - 3m^2x + m = 0$; $x = 1$
 c) $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + m - 2 = 0$; $x = 2$ d) $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3m = 0$; $x = 0$

VẤN ĐỀ 2: Dấu của nghiệm số của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) (1)

- (1) có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow P < 0$
- (1) có hai nghiệm cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \end{cases}$
- (1) có hai nghiệm dương $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$
- (1) có hai nghiệm âm $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$

Chú ý: Trong các trường hợp trên nếu yêu cầu hai nghiệm phân biệt thì $\Delta > 0$.

Bài 1. Xác định m để phương trình:

- i) có hai nghiệm trái dấu ii) có hai nghiệm âm phân biệt
 iii) có hai nghiệm dương phân biệt
- a) $x^2 + 5x + 3m - 1 = 0$ b) $2x^2 + 12x - 15m = 0$
 c) $x^2 - 2(m-1)x + m^2 = 0$ d) $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + m - 2 = 0$
 e) $(m-1)x^2 + (2-m)x - 1 = 0$ f) $mx^2 - 2(m+3)x + m + 1 = 0$
 g) $x^2 - 4x + m + 1 = 0$ h) $(m+1)x^2 + 2(m+4)x + m + 1 = 0$

VẤN ĐỀ 3: Một số bài tập áp dụng định lý Vi-et

1. Biểu thức đối xứng của các nghiệm số

Ta sử dụng công thức $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$; $P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ để biểu diễn các biểu thức đối xứng của các nghiệm x_1, x_2 theo S và P .

$$\text{Ví dụ: } x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = S^2 - 2P$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2) \left[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 \right] = S(S^2 - 3P)$$

2. Hệ thức của các nghiệm độc lập đối với tham số

Để tìm hệ thức của các nghiệm độc lập đối với tham số ta tìm:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \quad P = x_1x_2 = \frac{c}{a} \quad (S, P \text{ có chứa tham số } m).$$

Khử tham số m giữa S và P ta tìm được hệ thức giữa x_1 và x_2 .

3. Lập phương trình bậc hai

Nếu phương trình bậc hai có các nghiệm u và v thì phương trình bậc hai có dạng:

$$x^2 - Sx + P = 0, \quad \text{trong đó } S = u + v, P = uv.$$

Bài 1. Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình. Không giải phương trình, hãy tính:

$$A = x_1^2 + x_2^2; \quad B = x_1^3 + x_2^3; \quad C = x_1^4 + x_2^4; \quad D = |x_1 - x_2|; \quad E = (2x_1 + x_2)(2x_2 + x_1)$$

$$a) x^2 - x - 5 = 0$$

$$b) 2x^2 - 3x - 7 = 0$$

$$c) 3x^2 + 10x + 3 = 0$$

$$d) x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$e) 2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$f) \sqrt{3}x^2 + 5x - \sqrt{2} = 0$$

Bài 2. Cho phương trình: $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + m - 2 = 0$ (*). Xác định m để:

a) (*) có hai nghiệm phân biệt.

b) (*) có một nghiệm bằng 2. Tính nghiệm kia.

c) Tổng bình phương các nghiệm bằng 2.

Bài 3. Cho phương trình: $x^2 - 2(2m+1)x + 3 + 4m = 0$ (*).

a) Tìm m để (*) có hai nghiệm x_1, x_2 .

b) Tìm hệ thức giữa x_1, x_2 độc lập đối với m .

c) Tính theo m , biểu thức $A = x_1^3 + x_2^3$.

d) Tìm m để (*) có một nghiệm gấp 3 lần nghiệm kia.

e) Lập phương trình bậc hai có các nghiệm là x_1^2, x_2^2 .

$$\text{HD: a) } |m| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$b) x_1 + x_2 - x_1x_2 = -1$$

$$c) A = (2+4m)(16m^2+4m-5)$$

$$d) m = \frac{1 \pm 2\sqrt{7}}{6}$$

$$e) x^2 - 2(8m^2 + 8m - 1)x + (3 + 4m)^2 = 0$$

Bài 4. Cho phương trình: $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3m = 0$ (*).

a) Tìm m để (*) có nghiệm $x = 0$. Tính nghiệm còn lại.

b) Khi (*) có hai nghiệm x_1, x_2 . Tìm hệ thức giữa x_1, x_2 độc lập đối với m .

c) Tìm m để (*) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa: $x_1^2 + x_2^2 = 8$.

$$\text{HD: a) } m = 3; m = 4$$

$$b) (x_1 + x_2)^2 - 2(x_1 + x_2) - 4x_1x_2 - 8 = 0$$

$$c) m = -1; m = 2.$$

Bài 5. Cho phương trình: $x^2 - (m^2 - 3m)x + m^3 = 0$.

a) Tìm m để phương trình có một nghiệm bằng bình phương nghiệm kia.

b) Tìm m để phương trình có một nghiệm bằng 1. Tính nghiệm còn lại.

$$\text{HD: a) } m = 0; m = 1 \quad b) x_2 = 1; x_2 = 5\sqrt{2} - 7; x_2 = -5\sqrt{2} - 7.$$

IV. PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN TRONG DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

1. Định nghĩa và tính chất

- $|A| = \begin{cases} A & \text{khi } A \geq 0 \\ -A & \text{khi } A < 0 \end{cases}$
- $|A| \geq 0, \forall A$
- $|A.B| = |A|.|B|$
- $|A|^2 = A^2$
- $|A+B| = |A|+|B| \Leftrightarrow A.B \geq 0$
- $|A-B| = |A|+|B| \Leftrightarrow A.B \leq 0$
- $|A+B| = ||A|-|B|| \Leftrightarrow A.B \leq 0$
- $|A-B| = ||A|-|B|| \Leftrightarrow A.B \geq 0$

2. Cách giải

Để giải phương trình chứa ẩn trong dấu GTTĐ ta tìm cách để khử dấu GTTĐ, bằng cách:

- Dùng định nghĩa hoặc tính chất của GTTĐ.
- Bình phương hai vế.
- Đặt ẩn phụ.

• **Dạng 1:** $|A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B \\ A = -B \end{cases}$ hoặc $|A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ A = B \\ A < 0 \\ A = -B \end{cases}$

• **Dạng 2:** $|A| = |B| \xLeftrightarrow{C_1} A^2 = B^2 \xLeftrightarrow{C_2} \begin{cases} A = B \\ A = -B \end{cases}$

• **Dạng 3:** $a|A| + b|B| = C$

Đối với phương trình có dạng này ta thường dùng phương pháp khoảng để giải.

Bài 1. Giải các phương trình sau:

- | | |
|-----------------------------------|----------------------------------|
| a) $ 2x-1 = x+3$ | f) $ 4x-17 = x^2 - 4x - 5$ |
| b) $ 4x+7 = 2x+5$ | g) $ x-1 - x + 2x+3 = 2x+4$ |
| c) $x^2 - 3 x + 2 = 0$ | h) $ x-1 + x+2 + x-3 = 14$ |
| d) $\sqrt{x^2 + 6x + 9} = 2x-1 $ | i) $ x-1 + 2-x = 2x$ |
| e) $ x^2 - 4x - 5 = 4x - 17$ | |

Bài 2. Giải các phương trình sau:

- | | |
|----------------------------|------------------------------------|
| a) $ 4x+7 = 4x+7$ | d) $ x^2 - 2x - 3 = x^2 + 2x+3 $ |
| b) $ 2x-3 = 3-2x$ | e) $ 2x-5 + 2x^2 - 7x + 5 = 0$ |
| c) $ x-1 + 2x+1 = 3x $ | f) $ x+3 + 7-x = 10$ |

Bài 3. Giải các phương trình sau:

- | | |
|--------------------------------|--------------------------------|
| a) $x^2 - 2x + x-1 - 1 = 0$ | c) $x^2 - 2x - 5 x-1 - 5 = 0$ |
| b) $x^2 - 2x - 5 x-1 + 7 = 0$ | d) $x^2 + 4x + 3 x+2 = 0$ |

$$e) 4x^2 - 4x - |2x - 1| - 1 = 0$$

$$f) x^2 + 6x + |x + 3| + 10 = 0$$

V. PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN DƯỚI DẤU CĂN

Cách giải: Để giải phương trình chứa ẩn dưới dấu căn ta tìm cách để khử dấu căn, bằng cách:

- Nâng lũy thừa hai vế.
- Đặt ẩn phụ.

Chú ý: Khi thực hiện các phép biến đổi cần chú ý điều kiện để các căn được xác định.

$$\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases} \quad \sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 (A \geq 0) \\ A = B \end{cases}$$

Bài 1. Giải các phương trình sau:

$$a) \sqrt{2x-3} = x-3$$

$$b) \sqrt{5x+10} = 8-x$$

$$c) x - \sqrt{2x-5} = 4$$

$$d) \sqrt{x^2+x-12} = 8-x$$

$$e) \sqrt{x^2+2x+4} = \sqrt{2-x}$$

$$f) \sqrt{3x^2-9x+1} = x-2$$

$$g) \sqrt{3x^2-9x+1} = |x-2|$$

$$h) \sqrt{x^2-3x-10} = x-2$$

$$i) (x-3)\sqrt{x^2+4} = x^2-9$$

Bài 2. Giải các phương trình sau:

$$a) x^2 - 6x + 9 = 4\sqrt{x^2 - 6x + 6}$$

$$b) \sqrt{(x-3)(8-x)} + 26 = -x^2 + 11x$$

$$c) (x+4)(x+1) - 3\sqrt{x^2+5x+2} = 6$$

$$d) (x+5)(2-x) = 3\sqrt{x^2+3x}$$

$$e) x^2 + \sqrt{x^2+11} = 31$$

$$f) x^2 - 2x + 8 - 4\sqrt{(4-x)(x+2)} = 0$$

Bài 3. Giải các phương trình sau:

$$a) \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = 1$$

$$b) \sqrt{3x+7} - \sqrt{x+1} = 2$$

$$c) \sqrt{x^2+9} - \sqrt{x^2-7} = 2$$

$$d) \sqrt{3x^2+5x+8} - \sqrt{3x^2+5x+1} = 1$$

$$e) \sqrt[3]{1+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{1-\sqrt{x}} = 2$$

$$f) \sqrt{x^2+x-5} + \sqrt{x^2+8x-4} = 5$$

$$g) \sqrt[3]{5x+7} - \sqrt[3]{5x-13} = 1$$

$$h) \sqrt[3]{9-\sqrt{x+1}} + \sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}} = 4$$

Bài 4. Giải các phương trình sau:

$$a) \sqrt{x+3} + \sqrt{6-x} = 3 + \sqrt{(x+3)(6-x)}$$

$$b) \sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} = 3x + 2\sqrt{(2x+3)(x+1)} - 16$$

$$c) \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} - \sqrt{(x-1)(3-x)} = 1$$

$$d) \sqrt{7-x} + \sqrt{2+x} - \sqrt{(7-x)(2+x)} = 3$$

$$e) \sqrt{x+1} + \sqrt{4-x} + \sqrt{(x+1)(4-x)} = 5$$

$$f) \sqrt{3x-2} + \sqrt{x-1} = 4x-9 + 2\sqrt{3x^2-5x+2}$$

$$g) 1 + \frac{2}{3}\sqrt{x-x^2} = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$$

$$h) \sqrt{x} + \sqrt{9-x} = \sqrt{-x^2+9x+9}$$

Bài 5. Giải các phương trình sau:

$$a) \sqrt{2x-4} + 2\sqrt{2x-5} + \sqrt{2x+4} + 6\sqrt{2x-5} = 14$$

$$b) \sqrt{x+5} - 4\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} = 1$$

$$c) \sqrt{2x-2\sqrt{2x-1}} - 2\sqrt{2x+3-4\sqrt{2x-1}} + 3\sqrt{2x+8-6\sqrt{2x-1}} = 4$$

Bài 6. Giải các phương trình sau:

a)

VI. PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN Ở MẪU THỨC

Cách giải: Khi giải phương trình chứa ẩn ở mẫu thức, ta phải chú ý đến điều kiện xác định của phương trình (*mẫu thức khác 0*).

Bài tập: Giải các phương trình sau:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} 1 + \frac{2}{x-2} = \frac{10}{x+3} - \frac{50}{(2-x)(x+3)} & \text{b)} \frac{x+1}{x+2} + \frac{x-1}{x-2} = \frac{2x+1}{x+1} \\ \text{c)} \frac{2x+1}{3x+2} = \frac{x+1}{x-2} & \text{d)} \frac{x^2-3x+5}{x^2-4} = -1 \\ \text{e)} \frac{2x^2-5x+2}{x-1} = \frac{2x^2+x+15}{x-3} & \text{f)} \frac{x+3}{(x+1)^2} = \frac{4x-2}{(2x-1)^2} \\ \text{g)} \frac{3x-1}{x-1} - \frac{2x+5}{x+3} + \frac{4}{x^2+2x-3} = 2 & \text{h)} \frac{x+3}{x-4} + \frac{x-1}{x-2} = \frac{2}{-x^2+6x-8} \end{array}$$

VII. PHƯƠNG TRÌNH TRÙNG PHƯƠNG

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

1. Cách giải: $ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad (1) \Leftrightarrow \begin{cases} t = x^2, t \geq 0 \\ at^2 + bt + c = 0 \quad (2) \end{cases}$

2. Số nghiệm của phương trình trùng phương

Để xác định số nghiệm của (1) ta dựa vào số nghiệm của (2) và dấu của chúng.

- (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} (2) \text{ vô nghiệm} \\ (2) \text{ có nghiệm kép âm} \\ (2) \text{ có 2 nghiệm âm} \end{cases}$
- (1) có 1 nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} (2) \text{ có nghiệm kép bằng 0} \\ (2) \text{ có 1 nghiệm bằng 0, nghiệm còn lại âm} \end{cases}$
- (1) có 2 nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} (2) \text{ có nghiệm kép dương} \\ (2) \text{ có 1 nghiệm dương và 1 nghiệm âm} \end{cases}$
- (1) có 3 nghiệm $\Leftrightarrow (2) \text{ có 1 nghiệm bằng 0, nghiệm còn lại dương}$
- (1) có 4 nghiệm $\Leftrightarrow (2) \text{ có 2 nghiệm dương phân biệt}$

3. Một số dạng khác về phương trình bậc bốn

• **Dạng 1:** $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = K$, với $a+b=c+d$

– Đặt $t = (x+a)(x+b) \Rightarrow (x+c)(x+d) = t - ab + cd$

– PT trở thành: $t^2 + (cd - ab)t - K = 0$

• **Dạng 2:** $(x+a)^4 + (x+b)^4 = K$

– Đặt $t = x + \frac{a+b}{2} \Rightarrow x+a = t + \frac{a-b}{2}, x+b = t + \frac{b-a}{2}$

– PT trở thành: $2t^4 + 12\alpha^2 t^2 + 2\alpha^4 - K = 0 \quad \left(\text{với } \alpha = \frac{a-b}{2} \right)$

• **Dạng 3:** $ax^4 + bx^3 + cx^2 \pm bx + a = 0 \quad (a \neq 0)$ (phương trình đối xứng)

– Vì $x = 0$ không là nghiệm nên chia hai vế của phương trình cho x^2 , ta được:

$$PT \Leftrightarrow a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x \pm \frac{1}{x}\right) + c = 0 \quad (2)$$

– Đặt $t = x + \frac{1}{x}$ (hoặc $t = x - \frac{1}{x}$) với $|t| \geq 2$.

– PT (2) trở thành: $at^2 + bt + c - 2a = 0 \quad (|t| \geq 2)$.

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

b) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

c) $x^4 + 5x^2 + 6 = 0$

d) $3x^4 + 5x^2 - 2 = 0$

e) $x^4 + x^2 - 30 = 0$

f) $x^4 + 7x^2 - 8 = 0$

Bài 2. Tìm m để phương trình:

i) Vô nghiệm

ii) Có 1 nghiệm

iii) Có 2 nghiệm

iv) Có 3 nghiệm

v) Có 4 nghiệm

a) $x^4 + (1 - 2m)x^2 + m^2 - 1 = 0$

b) $x^4 - (3m + 4)x^2 + m^2 = 0$

c) $x^4 + 8mx^2 - 16m = 0$

Bài 3. Giải các phương trình sau:

a) $(x - 1)(x - 3)(x + 5)(x + 7) = 297$

b) $(x + 2)(x - 3)(x + 1)(x + 6) = -36$

c) $x^4 + (x - 1)^4 = 97$

d) $(x + 4)^4 + (x + 6)^4 = 2$

e) $(x + 3)^4 + (x + 5)^4 = 16$

f) $6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$

g) $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$

VIII. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT NHIỀU ẨN

1. Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad (a_1^2 + b_1^2 \neq 0, a_2^2 + b_2^2 \neq 0)$$

Giải và biện luận:

– Tính các định thức: $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$.

Xét D		Kết quả
$D \neq 0$		Hệ có nghiệm duy nhất $\left(x = \frac{D_x}{D}; y = \frac{D_y}{D}\right)$
$D = 0$	$D_x \neq 0$ hoặc $D_y \neq 0$	Hệ vô nghiệm
	$D_x = D_y = 0$	Hệ có vô số nghiệm

Chú ý: Để giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn ta có thể dùng các cách giải đã biết như: phương pháp thế, phương pháp cộng đại số.

2. Hệ phương trình bậc nhất nhiều ẩn

Nguyên tắc chung để giải các hệ phương trình nhiều ẩn là **khử bớt ẩn** để đưa về các phương trình hay hệ phương trình có số ẩn ít hơn. Để khử bớt ẩn, ta cũng có thể dùng các phương pháp cộng đại số, phương pháp thế như đối với hệ phương trình bậc nhất hai ẩn.

Bài 1. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 5x - 4y = 3 \\ 7x - 9y = 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y = 11 \\ 5x - 4y = 8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 6x - 2y = 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} (\sqrt{2} + 1)x + y = \sqrt{2} - 1 \\ 2x - (\sqrt{2} - 1)y = 2\sqrt{2} \end{cases}$

e) $\begin{cases} \frac{3}{4}x + \frac{2}{3}y = 16 \\ \frac{5}{2}x - \frac{3}{5}y = 11 \end{cases}$

f) $\begin{cases} \sqrt{3}x - y = 1 \\ 5x + \sqrt{2}y = \sqrt{3} \end{cases}$

Bài 2. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{8}{y} = 18 \\ \frac{5}{x} + \frac{4}{y} = 51 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{10}{x-1} + \frac{1}{y+2} = 1 \\ \frac{25}{x-1} + \frac{3}{y+2} = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{27}{2x-y} + \frac{32}{x+3y} = 7 \\ \frac{45}{2x-y} - \frac{48}{x+3y} = -1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2|x-6| + 3|y+1| = 5 \\ 5|x-6| - 4|y+1| = 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2|x+y| - |x-y| = 9 \\ 3|x+y| + 2|x-y| = 17 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 4|x+y| + 3|x-y| = 8 \\ 3|x+y| - 5|x-y| = 6 \end{cases}$

Bài 3. Giải và biện luận các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} mx + (m-1)y = m+1 \\ 2x + my = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} mx + (m-2)y = 5 \\ (m+2)x + (m+1)y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} (m-1)x + 2y = 3m-1 \\ (m+2)x - y = 1-m \end{cases}$

d) $\begin{cases} (m+4)x - (m+2)y = 4 \\ (2m-1)x + (m-4)y = m \end{cases}$

e) $\begin{cases} (m+1)x - 2y = m-1 \\ m^2x - y = m^2 + 2m \end{cases}$

f) $\begin{cases} mx + 2y = m+1 \\ 2x + my = 2m+5 \end{cases}$

Bài 4. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 3x + y - z = 1 \\ 2x - y + 2z = 5 \\ x - 2y - 3z = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 3y + 2z = 8 \\ 2x + y + z = 6 \\ 3x + y + z = 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 3y + 2z = -7 \\ -2x + 4y + 3z = 8 \\ 3x + y - z = 5 \end{cases}$

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG III

Bài 1. Giải và biện luận các phương trình sau:

a) $m^2x + 4m - 3 = x + m^2$

c) $x^2 - mx + m - 1 = 0$

b) $2x^2 + 12x - 15m = 0$

d) $x^2 - 2(m-2)x + m(m-3) = 0$

Bài 2. Tìm m để phương trình có một nghiệm x_0 . Tính nghiệm còn lại:

a) $x^2 - mx + m + 1 = 0; x_0 = -\frac{3}{2}$

b) $2x^2 - 3m^2x + m = 0; x_0 = 1.$

Bài 3. Trong các phương trình sau, tìm m để:

i) PT có hai nghiệm trái dấu

ii) PT có hai nghiệm âm phân biệt

iii) PT có hai nghiệm dương phân biệt

iv) PT có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa: $x_1^3 + x_2^3 = 0; x_1^2 + x_2^2 = 3$

a) $x^2 - 2(m-2)x + m(m-3) = 0$

b) $x^2 + 2(m-1)x + m^2 = 0$

c) $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 2 = 0$

d) $(m+2)x^2 - 2(m-1)x + m - 2 = 0$

e) $(m+1)x^2 + 2(m+4)x + m + 1 = 0$

f) $x^2 - 4x + m + 1 = 0$

Bài 4. Trong các phương trình sau, hãy:

i) Giải và biện luận phương trình.

ii) Khi phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 , tìm hệ thức giữa x_1, x_2 độc lập với m .

$$a) x^2 + (m-1)x - m = 0$$

$$b) x^2 - 2(m-2)x + m(m-3) = 0$$

$$c) (m+2)x^2 - 2(m-1)x + m - 2 = 0$$

$$d) x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 2 = 0$$

Bài 5. Giải các phương trình sau:

$$a) x^2 + \sqrt{x^2 - 6} = 12$$

$$b) x^2 + \sqrt{x^2 + 11} = 31$$

$$c) \sqrt{16x+17} = 8x-23$$

$$d) \sqrt{x^2 - 2x - 8} = \sqrt{3}(x-4)$$

$$e) \sqrt{3x^2 - 9x + 1} + x - 2 = 0$$

$$f) \sqrt{51 - 2x - x^2} = 1 - x$$

$$g) (x-3)\sqrt{x^2 - 4} = x^2 - 9$$

$$h) \sqrt{x+3} + 1 = \sqrt{3x-1}$$

Bài 6. Giải các phương trình sau:

$$a) \sqrt{4-3\sqrt{10-3x}} = x-2$$

$$b) \sqrt{x-5} + \sqrt{x+3} = \sqrt{2x+4}$$

$$c) \sqrt{3x+4} - \sqrt{2x-1} = \sqrt{x+3}$$

$$d) \sqrt{x^2 - 3x + 3} + \sqrt{x^2 - 3x + 6} = 3$$

$$e) \sqrt{x+2} - \sqrt{2x-3} = \sqrt{3x-5}$$

$$f) \sqrt{3x-3} - \sqrt{5-x} = \sqrt{2x-4}$$

$$g) 2\sqrt{x+2} + 2\sqrt{x+1} - \sqrt{x+1} = 4$$

$$h) \sqrt{x+1} - 1 = \sqrt{x} - \sqrt{x+8}$$

Bài 7. Giải các phương trình sau:

$$a) \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 2$$

$$b) \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = \frac{x+3}{2}$$

$$c) \sqrt[4]{x-\sqrt{x^2-1}} + \sqrt{x+\sqrt{x^2-1}} = 2$$

$$d) x^2 - x - \sqrt{x^2 - x + 13} = 7$$

$$e) x^2 + 2\sqrt{x^2 - 3x + 1} = 3x + 4$$

$$f) 2x^2 + 3\sqrt{2x^2 + x + 1} = 9 - x$$

$$g) x^2 - \sqrt{x^2 - 2x + 4} = 2x - 2$$

$$h) 2x^2 + 5\sqrt{x^2 + 3x + 5} = 23 - 6x$$

CHƯƠNG IV BẤT ĐẲNG THỨC VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

I. BẤT ĐẲNG THỨC

1. Tính chất

Điều kiện	Nội dung	
	$a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$	(1)
$c > 0$	$a < b \Leftrightarrow ac < bc$	(2a)
$c < 0$	$a < b \Leftrightarrow ac > bc$	(2b)
	$a < b \text{ và } c < d \Rightarrow a + c < b + d$	(3)
$a > 0, c > 0$	$a < b \text{ và } c < d \Rightarrow ac < bd$	(4)
n nguyên dương	$a < b \Leftrightarrow a^{2n+1} < b^{2n+1}$	(5a)
	$0 < a < b \Rightarrow a^{2n} < b^{2n}$	(5b)
$a > 0$	$a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$	(6a)
	$a < b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$	(6b)

2. Một số bất đẳng thức thông dụng

$$a) a^2 \geq 0, \forall a. \quad a^2 + b^2 \geq 2ab.$$

b) Bất đẳng thức Cô-si:

+ Với $a, b \geq 0$, ta có: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.

+ Với $a, b, c \geq 0$, ta có: $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Hệ quả: – Nếu $x, y > 0$ có $S = x + y$ không đổi thì $P = xy$ lớn nhất $\Leftrightarrow x = y$.
– Nếu $x, y > 0$ có $P = xy$ không đổi thì $S = x + y$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow x = y$.

c) Bất đẳng thức về giá trị tuyệt đối

Điều kiện	Nội dung
	$ x \geq 0, x \geq x, x \geq -x$
$a > 0$	$ x \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
	$ x \geq a \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -a \\ x \geq a \end{cases}$
	$ a - b \leq a + b \leq a + b $

d) Bất đẳng thức về các cạnh của tam giác

Với a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác, ta có:

+ $a, b, c > 0$.

+ $|a - b| < c < a + b$; $|b - c| < a < b + c$; $|c - a| < b < c + a$.

e) Bất đẳng thức Bu-nhia-cốp-xki

Với $a, b, x, y \in \mathbb{R}$, ta có: $(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow ay = bx$.

VẤN ĐỀ 1: Chứng minh BĐT dựa vào định nghĩa và tính chất cơ bản

• Để chứng minh một BĐT ta có thể sử dụng các cách sau:

- Biến đổi BĐT cần chứng minh tương đương với một BĐT đã biết.
- Sử dụng một BĐT đã biết, biến đổi để dẫn đến BĐT cần chứng minh.

• Một số BĐT thường dùng:

$$+ A^2 \geq 0 \quad + A^2 + B^2 \geq 0 \quad + A.B \geq 0 \text{ với } A, B \geq 0. \quad + A^2 + B^2 \geq 2AB$$

Chú ý:

- Trong quá trình biến đổi, ta thường chú ý đến các hằng đẳng thức.
- Khi chứng minh BĐT ta thường tìm điều kiện để dấu đẳng thức xảy ra. Khi đó ta có thể tìm GTLN, GTNN của biểu thức.

Bài 1. Cho $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

b) $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$

c) $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a + b + c)$

d) $a^2 + b^2 + c^2 \geq 2(ab + bc - ca)$

e) $a^4 + b^4 + c^2 + 1 \geq 2a(ab^2 - a + c + 1)$

f) $\frac{a^2}{4} + b^2 + c^2 \geq ab - ac + 2bc$

g) $a^2(1 + b^2) + b^2(1 + c^2) + c^2(1 + a^2) \geq 6abc$

h)

$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$

i) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}}$ với $a, b, c > 0$

k) $a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$ với $a, b, c \geq 0$

HD: a) $\Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$

b) $\Leftrightarrow (a - b)^2 + (a - 1)^2 + (b - 1)^2 \geq 0$

c) $\Leftrightarrow (a - 1)^2 + (b - 1)^2 + (c - 1)^2 \geq 0$

d) $\Leftrightarrow (a - b + c)^2 \geq 0$

$$e) \Leftrightarrow (a^2 - b^2)^2 + (a - c)^2 + (a - 1)^2 \geq 0 \quad f) \Leftrightarrow \left(\frac{a}{2} - (b - c) \right)^2 \geq 0$$

$$g) \Leftrightarrow (a - bc)^2 + (b - ca)^2 + (c - ab)^2 \geq 0$$

$$h) \Leftrightarrow \left(\frac{a}{2} - b \right)^2 + \left(\frac{a}{2} - c \right)^2 + \left(\frac{a}{2} - d \right)^2 + \left(\frac{a}{2} - e \right)^2 \geq 0$$

$$i) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{c}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{c}} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right)^2 \geq 0$$

$$k) \Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 + (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2 + (\sqrt{c} - \sqrt{a})^2 \geq 0$$

Bài 2. Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

$$a) \frac{a^3 + b^3}{2} \geq \left(\frac{a + b}{2} \right)^3; \text{ với } a, b \geq 0$$

$$b) a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3$$

$$c) a^4 + 3 \geq 4a$$

$$d) a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc, \text{ với } a, b, c > 0.$$

$$e) a^4 + b^4 \leq \frac{a^6}{b^2} + \frac{b^6}{a^2}; \text{ với } a, b \neq 0.$$

$$f) \frac{1}{1 + a^2} + \frac{1}{1 + b^2} \geq \frac{2}{1 + ab}; \text{ với } ab \geq 1.$$

$$g) \frac{a^2 + 3}{\sqrt{a^2 + 2}} > 2$$

$$h) (a^5 + b^5)(a + b) \geq (a^4 + b^4)(a^2 + b^2); \text{ với } ab > 0.$$

$$HD: a) \Leftrightarrow \frac{3}{8}(a + b)(a - b)^2 \geq 0$$

$$b) \Leftrightarrow (a^3 - b^3)(a - b) \geq 0$$

$$c) \Leftrightarrow (a - 1)^2(a^2 + 2a + 3) \geq 0$$

$$d) \text{ Sử dụng hằng đẳng thức } a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3a^2b - 3ab^2.$$

$$BDT \Leftrightarrow (a + b + c)[a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca)] \geq 0.$$

$$e) \Leftrightarrow (a^2 - b^2)^2(a^4 + a^2b^2 + b^4) \geq 0$$

$$f) \Leftrightarrow \frac{(b - a)^2(ab - 1)}{(1 + ab)(1 + a^2)(1 + b^2)} \geq 0$$

$$g) \Leftrightarrow (a^2 + 1)^2 > 0$$

$$h) \Leftrightarrow ab(a - b)(a^3 - b^3) \geq 0.$$

Bài 3. Cho $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng $a^2 + b^2 \geq 2ab$ (1). Áp dụng chứng minh các bất đẳng thức sau:

$$a) a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geq 4abcd$$

$$b) (a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) \geq 8abc$$

$$c) (a^2 + 4)(b^2 + 4)(c^2 + 4)(d^2 + 4) \geq 256abcd$$

$$HD: a) a^4 + b^4 \geq 2a^2b^2; c^2 + d^2 \geq 2c^2d^2; a^2b^2 + c^2d^2 \geq 2abcd$$

$$b) a^2 + 1 \geq 2a; b^2 + 1 \geq 2b; c^2 + 1 \geq 2c$$

$$c) a^2 + 4 \geq 4a; b^2 + 4 \geq 4b; c^2 + 4 \geq 4c; d^2 + 4 \geq 4d$$

Bài 4. Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$. Chứng minh bất đẳng thức: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ (1). Áp dụng chứng minh các bất đẳng thức sau:

$$a) (a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$b) \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \geq \left(\frac{a + b + c}{3} \right)^2$$

$$c) (a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$$

$$d) a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c)$$

$$e) \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}} \text{ với } a, b, c > 0.$$

$$f) a^4 + b^4 + c^4 \geq abc \text{ nếu } a + b + c = 1$$

$$HD: \Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0.$$

a) Khai triển, rút gọn, đưa về (1)

b, c) Vận dụng a)

d) Sử dụng (1) hai lần

e) Bình phương 2 vế, sử dụng (1)

f) Sử dụng d)

VẤN ĐỀ 2: Chứng minh BĐT dựa vào BĐT Cô-si

1. Bất đẳng thức Cô-si:

$$+ \text{ Với } a, b \geq 0, \text{ ta có: } \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}. \text{ Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow a = b.$$

$$+ \text{ Với } a, b, c \geq 0, \text{ ta có: } \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}. \text{ Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow a = b = c.$$

$$2. \text{ Hệ quả: } + \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 \geq ab \quad + \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^3 \geq abc$$

3. Ứng dụng tìm GTLN, GTNN:

+ Nếu $x, y > 0$ có $S = x + y$ không đổi thì $P = xy$ lớn nhất $\Leftrightarrow x = y$.

+ Nếu $x, y > 0$ có $P = xy$ không đổi thì $S = x + y$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow x = y$.

Bài 1. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

$$a) (a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$$

$$b) (a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \geq 9abc$$

$$c) (1+a)(1+b)(1+c) \geq (1+\sqrt[3]{abc})^3$$

$$d) \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geq a+b+c; \text{ với } a, b, c > 0.$$

$$e) a^2(1+b^2) + b^2(1+c^2) + c^2(1+a^2) \geq 6abc$$

$$f) \frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \leq \frac{a+b+c}{2}; \text{ với } a, b, c > 0.$$

$$g) \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}; \text{ với } a, b, c > 0.$$

Bài 2. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

$$a) (a^3+b^3+c^3) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq (a+b+c)^2$$

$$b) 3(a^3+b^3+c^3) \geq (a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$$

$$c) 9(a^3+b^3+c^3) \geq (a+b+c)^3$$

Bài 3. Cho $a, b > 0$. Chứng minh $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$ (1). Áp dụng chứng minh các BĐT sau:

$$a) \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 2 \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right); \text{ với } a, b, c > 0.$$

$$b) \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq 2 \left(\frac{1}{2a+b+c} + \frac{1}{a+2b+c} + \frac{1}{a+b+2c} \right); \text{ với } a, b, c > 0.$$

$$c) \text{ Cho } a, b, c > 0 \text{ thỏa } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 4. \text{ Chứng minh: } \frac{1}{2a+b+c} + \frac{1}{a+2b+c} + \frac{1}{a+b+2c} \leq 1$$

$$d) \frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \leq \frac{a+b+c}{2}; \text{ với } a, b, c > 0.$$

Bài 4. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$

Bài 5. Áp dụng BĐT Cô-si để tìm GTNN của các biểu thức sau:

a) $y = \frac{x}{2} + \frac{18}{x}; x > 0.$

b) $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x-1}; x > 1.$

c) $y = \frac{3x}{2} + \frac{1}{x+1}; x > -1.$

d) $y = \frac{x}{3} + \frac{5}{2x-1}; x > \frac{1}{2}$

e) $y = \frac{x}{1-x} + \frac{5}{x}; 0 < x < 1$

f) $y = \frac{x^3+1}{x^2}; x > 0$

g) $y = \frac{x^2+4x+4}{x}; x > 0$

h) $y = x^2 + \frac{2}{x^3}; x > 0$

Bài 6. Áp dụng BĐT Cô-si để tìm GTLN của các biểu thức sau:

a) $y = (x+3)(5-x); -3 \leq x \leq 5$

b) $y = x(6-x); 0 \leq x \leq 6$

c) $y = (x+3)(5-2x); -3 \leq x \leq \frac{5}{2}$

d) $y = (2x+5)(5-x); -\frac{5}{2} \leq x \leq 5$

e) $y = (6x+3)(5-2x); -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$

f) $y = \frac{x}{x^2+2}; x > 0$

VẤN ĐỀ 3: Chứng minh BĐT dựa vào BĐT Bu-nhia-cốp-xki (đọc thêm)

1. Bất đẳng thức Bu-nhia-cốp-xki: (B)

• Với $a, b, x, y \in R$, ta có: $(ax+by)^2 \leq (a^2+b^2)(x^2+y^2)$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow ay = bx$.

• Với $a, b, c, x, y, z \in R$, ta có: $(ax+by+cz)^2 \leq (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$

Hệ quả:

• $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$

• $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$

Bài 1. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $3a^2+4b^2 \geq 7$, với $3a+4b=7$

b) $3a^2+5b^2 \geq \frac{735}{47}$, với $2a-3b=7$

c) $7a^2+11b^2 \geq \frac{2464}{137}$, với $3a-5b=8$

d) $a^2+b^2 \geq \frac{4}{5}$, với $a+2b=2$

e) $2a^2+3b^2 \geq 5$, với $2a+3b=5$

f) $(x-2y+1)^2+(2x-4y+5)^2 \geq \frac{9}{5}$

HD: a) Áp dụng BĐT (B) cho 4 số $\sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{3}a, \sqrt{4}b$.

b) Áp dụng BĐT (B) cho 4 số $\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{3}{\sqrt{5}}, \sqrt{3}a, \sqrt{5}b$.

c) Áp dụng BĐT (B) cho 4 số $\frac{3}{\sqrt{7}}, -\frac{5}{\sqrt{11}}, \sqrt{7}a, \sqrt{11}b$.

d) Áp dụng BĐT (B) cho 4 số $1, 2, a, b$.

e) Áp dụng BĐT (B) cho 4 số $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{2}a, \sqrt{3}b$.

f) Đặt $a = x - 2y + 1$, $b = 2x - 4y + 5$, ta có: $2a - b = -3$ và BĐT $\Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq \frac{9}{5}$.

Áp dụng BĐT (B) cho 4 số $2; -1; a; b$ ta được đpcm.

Bài 2. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

- a) $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$, với $a + b \geq 1$. b) $a^3 + b^3 \geq \frac{1}{4}$, với $a + b \geq 1$.
c) $a^4 + b^4 \geq \frac{1}{8}$, với $a + b \geq 1$. d) $a^4 + b^4 \geq 2$, với $a + b = 2$.

HD: a) $1 \leq (1a+1b)^2 \leq (1^2+1^2)(a^2+b^2) \Rightarrow đpcm.$

$$b) a+b \geq 1 \Rightarrow b \geq 1-a \Rightarrow b^3 \geq (1-a)^3 = 1-3a+3a^2-a^3 \\ \Rightarrow b^3+a^3 \geq 3\left(a-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4}.$$

$$c) (1^2+1^2)(a^4+b^4) \geq (a^2+b^2)^2 \geq \frac{1}{4} \Rightarrow đpcm.$$

$$d) (1^2+1^2)(a^2+b^2) \geq (a+b)^2 = 4 \Rightarrow a^2+b^2 \geq 2. \\ (1^2+1^2)(a^4+b^4) \geq (a^2+b^2)^2 \geq 4 \Rightarrow a^4+b^4 \geq 2$$

Bài 3. Cho x, y, z là ba số dương và $x+y+z=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt{1-x} + \sqrt{1-y} + \sqrt{1-z}.$$

HD: Áp dụng BĐT (B), ta có: $P \leq \sqrt{1+1+1} \cdot \sqrt{(1-x)+(1-y)+(1-z)} \leq \sqrt{6}$

$$Dấu "=" xảy ra \Leftrightarrow 1-x=1-y=1-z \Leftrightarrow x=y=z=\frac{1}{3}.$$

$$Vậy Max P = \sqrt{6} \text{ khi } x=y=z=\frac{1}{3}.$$

Bài 4. Cho x, y, z là ba số dương và $x+y+z \leq 1$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} \geq \sqrt{82}$$

HD: Áp dụng BĐT (B), ta có:

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)(1^2+9^2) \geq \left(x + \frac{9}{x}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{82}} \left(x + \frac{9}{x}\right) \quad (1)$$

$$Tương tự ta có: \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{82}} \left(y + \frac{9}{y}\right) \quad (2), \quad \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{82}} \left(z + \frac{9}{z}\right) \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra:

$$P \geq \frac{1}{\sqrt{82}} \left[(x+y+z) + 9 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \right] = \frac{1}{\sqrt{82}} \left[(x+y+z) + \frac{1}{9} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) + \frac{80}{9} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \right] \\ \geq \frac{1}{\sqrt{82}} \left[\frac{2}{3} \sqrt{(x+y+z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)} + \frac{80}{9} \cdot \frac{9}{x+y+z} \right] \geq \sqrt{82}.$$

$$Dấu "=" xảy ra \Leftrightarrow x=y=z=\frac{1}{3}.$$

Bài 5. Cho $a, b, c \geq -\frac{1}{4}$ thỏa $a+b+c=1$. Chứng minh:

$$\stackrel{(1)}{7} < \sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} \stackrel{(2)}{\leq} \sqrt{21}.$$

HD: Áp dụng BĐT (B) cho 6 số: $1; 1; 1; \sqrt{4a+1}; \sqrt{4b+1}; \sqrt{4c+1} \Rightarrow (2).$

Chú ý: $\sqrt{x+y+z} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=0$. Từ đó $\Rightarrow (1)$

Bài 6. Cho $x, y > 0$. Tìm GTNN của các biểu thức sau:

a) $A = \frac{4}{x} + \frac{1}{4y}$, với $x + y = 1$ b) $B = x + y$, với $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 6$

HD: a) Chú ý: $A = \left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)^2$.

Áp dụng BĐT (B) với 4 số: $\sqrt{x}; \frac{2}{\sqrt{x}}; \sqrt{y}; \frac{1}{2\sqrt{y}}$ ta được:

$$\frac{25}{4} \leq \left(\sqrt{x} \cdot \frac{2}{\sqrt{x}} + \sqrt{y} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}\right)^2 \leq (x+y) \left(\frac{4}{x} + \frac{1}{4y}\right)$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = \frac{4}{5}; y = \frac{1}{5}$. Vậy $\min A = \frac{25}{4}$ khi $x = \frac{4}{5}; y = \frac{1}{5}$.

b) Chú ý: $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = \left(\sqrt{\frac{2}{x}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{3}{y}}\right)^2$.

Áp dụng BĐT (B) với 4 số: $\sqrt{x}; \sqrt{y}; \sqrt{\frac{2}{x}}; \sqrt{\frac{3}{y}}$ ta được:

$$(x+y) \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{y}\right) \geq \left(\sqrt{x} \cdot \sqrt{\frac{2}{x}} + \sqrt{y} \cdot \sqrt{\frac{3}{y}}\right)^2 = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 \Rightarrow x+y \geq \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2}{6}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}{6\sqrt{3}}; y = \frac{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}{6\sqrt{2}}$. Vậy $\min B = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2}{6}$.

Bài 7. Tìm GTLN của các biểu thức sau:

a) $A = x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x}$, với mọi x, y thỏa $x^2 + y^2 = 1$.

HD: a) Chú ý: $|x+y| \leq \sqrt{2(x^2 + y^2)} = \sqrt{2}$.

$$A \leq \sqrt{(x^2 + y^2)(1+y+1+x)} = \sqrt{x+y+2} \leq \sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Bài 8. Tìm GTLN, GTNN của các biểu thức sau:

a) $A = \sqrt{7-x} + \sqrt{2+x}$, với $-2 \leq x \leq 7$ b) $B = 6\sqrt{x-1} + 8\sqrt{3-x}$, với $1 \leq x \leq 3$

c) $C = y - 2x + 5$, với $36x^2 + 16y^2 = 9$ d) $D = 2x - y - 2$, với $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

HD: a) • $A \leq \sqrt{(1^2 + 1^2)(7-x+x+2)} = 3\sqrt{2}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$.

• $A \geq \sqrt{(7-x)+(x+2)} = 3$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = -2$ hoặc $x = 7$.

$\Rightarrow \max A = 3\sqrt{2}$ khi $x = \frac{5}{2}$; $\min A = 3$ khi $x = -2$ hoặc $x = 7$.

b) • $B \leq \sqrt{(6^2 + 8^2)(x-1+3-x)} = 10\sqrt{2}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = \frac{43}{25}$.

• $B \geq 6\sqrt{(x-1)+(3-x)} + 2\sqrt{3-x} \geq 6\sqrt{2}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 3$.

$\Rightarrow \max B = 10\sqrt{2}$ khi $x = \frac{43}{25}$; $\min B = 6\sqrt{2}$ khi $x = 3$.

c) Chú ý: $36x^2 + 16y^2 = (6x)^2 + (4y)^2$. Từ đó: $y - 2x = \frac{1}{4} \cdot 4y - \frac{1}{3} \cdot 6x$.

$$\Rightarrow |y - 2x| = \left| \frac{1}{4} \cdot 4y - \frac{1}{3} \cdot 6x \right| \leq \sqrt{\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{9} \right) (16y^2 + 36x^2)} = \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow -\frac{5}{4} \leq y - 2x \leq \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{15}{4} \leq C = y - 2x + 5 \leq \frac{25}{4}.$$

$$\Rightarrow \min C = \frac{15}{4} \text{ khi } x = \frac{2}{5}, y = -\frac{9}{20}; \quad \max C = \frac{25}{4} \text{ khi } x = -\frac{2}{5}, y = \frac{9}{20}.$$

d) Chú ý: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = \frac{1}{36} ((3x)^2 + (2y)^2)$. Từ đó: $2x - y = \frac{2}{3} \cdot 3x - \frac{1}{2} \cdot 2y$.

$$\Rightarrow |2x - y| = \left| \frac{2}{3} \cdot 3x - \frac{1}{2} \cdot 2y \right| \leq \sqrt{\left(\frac{4}{9} + \frac{1}{4} \right) (9x^2 + 4y^2)} = 5$$

$$\Rightarrow -5 \leq 2x - y \leq 5 \Rightarrow -7 \leq D = 2x - y - 2 \leq 3.$$

$$\Rightarrow \min D = -7 \text{ khi } x = -\frac{8}{5}, y = \frac{9}{5}; \quad \max D = 3 \text{ khi } x = \frac{8}{5}, y = -\frac{9}{5}.$$

II. BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

1. Giải và biện luận bất phương trình dạng $ax + b < 0$

Điều kiện		Kết quả tập nghiệm
$a > 0$		$S = \left(-\infty; -\frac{b}{a} \right)$
$a < 0$		$S = \left(-\frac{b}{a}; +\infty \right)$
$a = 0$	$b \geq 0$	$S = \emptyset$
	$b < 0$	$S = R$

2. Hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn

Muốn giải hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn ta giải từng bất phương trình của hệ rồi lấy giao các tập nghiệm thu được.

3. Dấu của nhị thức bậc nhất

$f(x) = ax + b \quad (a \neq 0)$	
$x \in \left(-\infty; -\frac{b}{a} \right)$	$a \cdot f(x) < 0$
$x \in \left(-\frac{b}{a}; +\infty \right)$	$a \cdot f(x) > 0$

VẤN ĐỀ 1: Giải và biện luận bất phương trình dạng $ax + b < 0$

Bài 18. Giải các bất phương trình sau:

a) $-2x + \frac{3}{5} > \frac{3(2x-7)}{3}$

b) $3 - \frac{2x+1}{5} > x + \frac{3}{4}$

$$c) \frac{5(x-1)}{6} - 1 < \frac{2(x+1)}{3}$$

$$d) 2 + \frac{3(x+1)}{8} < 3 - \frac{x-1}{4}$$

Bài 19. Giải và biện luận các bất phương trình sau:

$$a) m(x-m) \leq x-1$$

$$b) mx+6 > 2x+3m$$

$$c) (m+1)x+m < 3m+4$$

$$d) mx+1 > m^2+x$$

$$e) \frac{m(x-2)}{6} + \frac{x-m}{3} > \frac{x+1}{2}$$

$$f) 3-mx < 2(x-m)-(m+1)^2$$

Bài 20. Tìm m để các bất phương trình sau vô nghiệm:

$$a) m^2x+4m-3 < x+m^2$$

$$b) m^2x+1 \geq m+(3m-2)x$$

$$c) mx-m^2 > mx-4$$

$$d) 3-mx < 2(x-m)-(m+1)^2$$

VẤN ĐỀ 2: Giải hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn

Bài 1. Giải các hệ bất phương trình sau:

$$a) \begin{cases} 8x-5 > \frac{15x-8}{2} \\ 2(2x-3) > 5x-\frac{3}{4} \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \frac{4x-5}{7} < x+3 \\ \frac{3x+8}{4} > 2x-5 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} \frac{4}{3}-12x \leq x+\frac{1}{2} \\ \frac{4x-3}{2} < \frac{2-x}{3} \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} \frac{x}{2} \leq x+\frac{4}{3} \\ \frac{2x-9}{3} < \frac{19+x}{2} \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} \frac{11-x}{2} \geq 2x-5 \\ 2(3x+1) \geq \frac{x-8}{2} \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} 15x-2 > 2x+\frac{1}{3} \\ 2(x-4) < \frac{3x-14}{2} \end{cases}$$

$$g) \begin{cases} \frac{2x-3}{4} < \frac{3x+1}{5} \\ 3x+\frac{5}{2} < 8-\frac{x}{3} \end{cases}$$

$$h) \begin{cases} \frac{3x-1}{4} - \frac{3(x-2)}{8} - 1 > \frac{5-3x}{2} \\ 3 - \frac{4x-1}{18} > \frac{x-1}{12} - \frac{4-5x}{9} \end{cases}$$

$$i) \begin{cases} 3x+1 \geq 2x+7 \\ 4x+3 > 2x+19 \end{cases}$$

Bài 2. Tìm các nghiệm nguyên của các hệ bất phương trình sau:

$$a) \begin{cases} 6x+\frac{5}{7} > 4x+7 \\ \frac{8x+3}{2} < 2x+25 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 15x-2 > 2x+\frac{1}{3} \\ 2(x-4) < \frac{3x-14}{2} \end{cases}$$

Bài 3. Xác định m để hệ bất phương trình sau có nghiệm:

$$a) \begin{cases} x+m-1 > 0 \\ 3m-2-x > 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x-1 > 0 \\ mx-3 > 0 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x+4m^2 \leq 2mx+1 \\ 3x+2 > 2x-1 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 7x-2 \geq -4x+19 \\ 2x-3m+2 < 0 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} mx-1 > 0 \\ (3m-2)x-m > 0 \end{cases}$$

VẤN ĐỀ 3: Bất phương trình quy về bất phương trình bậc nhất một ẩn

1. Bất phương trình tích

• Dạng: $P(x).Q(x) > 0$ (1) (trong đó $P(x)$, $Q(x)$ là những nhị thức bậc nhất.)

• Cách giải: Lập bảng xét dấu của $P(x).Q(x)$. Từ đó suy ra tập nghiệm của (1).

2. Bất phương trình chứa ẩn ở mẫu

• Dạng: $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ (2) (trong đó $P(x)$, $Q(x)$ là những nhị thức bậc nhất.)

• Cách giải: Lập bảng xét dấu của $\frac{P(x)}{Q(x)}$. Từ đó suy ra tập nghiệm của (2).

Chú ý: Không nên qui đồng và khử mẫu.

3. Bất phương trình chứa ẩn trong dấu GTTĐ

• Tương tự như giải phương trình chứa ẩn trong dấu GTTĐ, ta thường sử dụng định nghĩa hoặc tính chất của GTTĐ để khử dấu GTTĐ.

• Dạng 1: $|A| < B \Leftrightarrow -B < A < B$

• Dạng 2: $|A| > B \Leftrightarrow \begin{cases} A > B \\ A < -B \end{cases}$

Bài 1. Giải các bất phương trình sau:

- a) $(x+1)(x-1)(3x-6) > 0$ b) $(2x-7)(4-5x) \geq 0$ c) $x^2 - x - 20 > 2(x-11)$
d) $3x(2x+7)(9-3x) \geq 0$ e) $x^3 + 8x^2 + 17x + 10 < 0$ f) $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 > 0$

Bài 2. Giải các bất phương trình sau:

- a) $\frac{(2x-5)(x+2)}{-4x+3} > 0$ b) $\frac{x-3}{x+1} > \frac{x+5}{x-2}$ c) $\frac{x-3}{x+5} < \frac{1-2x}{x-3}$
d) $\frac{3x-4}{x-2} > 1$ e) $\frac{2x-5}{2-x} \geq -1$ f) $\frac{2}{x-1} \leq \frac{5}{2x-1}$
g) $\frac{-4}{3x+1} < \frac{3}{2-x}$ h) $\frac{2x^2+x}{1-2x} \geq 1-x$ i) $\frac{2x-5}{3x+2} < \frac{3x+2}{2x-5}$

Bài 3. Giải các bất phương trình sau:

- a) $|3x-2| > 7$ b) $|5x-12| < 3$ c) $|2x-8| \leq 7$
d) $|3x+15| \geq 3$ e) $|x-1| > \frac{x+1}{2}$ f) $|x-2| < \frac{x}{2}$
g) $|2x-5| \leq x+1$ h) $|2x+1| \leq x$ i) $|x-2| > x+1$

III. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

1. Dấu của tam thức bậc hai

$f(x) = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$	
$\Delta < 0$	$a.f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$
$\Delta = 0$	$a.f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$
$\Delta > 0$	$a.f(x) > 0, \forall x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$
	$a.f(x) < 0, \forall x \in (x_1; x_2)$

Nhận xét: • $ax^2 + bx + c > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$

• $ax^2 + bx + c < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$

2. Bất phương trình bậc hai một ẩn $ax^2 + bx + c > 0$ (hoặc $\geq 0; < 0; \leq 0$)

Để giải BPT bậc hai ta áp dụng định lý về dấu của tam thức bậc hai.

VẤN ĐỀ 1: Giải bất phương trình, hệ bất phương trình bậc hai một ẩn

Bài 1. Xét dấu các biểu thức sau:

- | | | |
|-------------------------------|--------------------------------|---|
| a) $3x^2 - 2x + 1$ | b) $-x^2 + 4x + 5$ | c) $-4x^2 + 12x - 9$ |
| d) $3x^2 - 2x - 8$ | e) $-x^2 + 2x - 1$ | f) $2x^2 - 7x + 5$ |
| g) $(3x^2 - 10x + 3)(4x - 5)$ | h) $(3x^2 - 4x)(2x^2 - x - 1)$ | i) $\frac{(3x^2 - x)(3 - x^2)}{4x^2 + x - 3}$ |

Bài 2. Giải các bất phương trình sau:

- | | | |
|---|---|---|
| a) $2x^2 - 5x + 2 < 0$ | b) $-5x^2 + 4x + 12 < 0$ | c) $16x^2 + 40x + 25 > 0$ |
| d) $-2x^2 + 3x - 7 \geq 0$ | e) $3x^2 - 4x + 4 \geq 0$ | f) $x^2 - x - 6 \leq 0$ |
| g) $\frac{-3x^2 - x + 4}{x^2 + 3x + 5} > 0$ | h) $\frac{4x^2 + 3x - 1}{x^2 + 5x + 7} > 0$ | i) $\frac{5x^2 + 3x - 8}{x^2 - 7x + 6} < 0$ |

Bài 3. Giải và biện luận các bất phương trình sau:

- | | | |
|---------------------------|-----------------------------------|------------------------|
| a) $x^2 - mx + m + 3 > 0$ | b) $(1 + m)x^2 - 2mx + 2m \leq 0$ | c) $mx^2 - 2x + 4 > 0$ |
|---------------------------|-----------------------------------|------------------------|

HD: Giải và biện luận BPT bậc hai, ta tiến hành như sau:

– Lập bảng xét dấu chung cho a và Δ .

– Dựa vào bảng xét dấu, biện luận nghiệm của BPT.

Bài 4. Giải các hệ bất phương trình sau:

- | | | |
|---|--|---|
| a) $\begin{cases} 2x^2 + 9x + 7 > 0 \\ x^2 + x - 6 < 0 \end{cases}$ | b) $\begin{cases} 2x^2 + x - 6 > 0 \\ 3x^2 - 10x + 3 \geq 0 \end{cases}$ | c) $\begin{cases} -2x^2 - 5x + 4 < 0 \\ -x^2 - 3x + 10 > 0 \end{cases}$ |
| d) $\begin{cases} x^2 + 4x + 3 \geq 0 \\ 2x^2 - x - 10 \leq 0 \\ 2x^2 - 5x + 3 > 0 \end{cases}$ | e) $\begin{cases} -x^2 + 4x - 7 < 0 \\ x^2 - 2x - 1 \geq 0 \end{cases}$ | f) $\begin{cases} x^2 + x + 5 < 0 \\ x^2 - 6x + 1 > 0 \end{cases}$ |
| g) $-4 \leq \frac{x^2 - 2x - 7}{x^2 + 1} \leq 1$ | h) $\frac{1}{13} \leq \frac{x^2 - 2x - 2}{x^2 - 5x + 7} \leq 1$ | i) $-1 < \frac{10x^2 - 3x - 2}{-x^2 + 3x - 2} < 1$ |

VẤN ĐỀ 2: Phương trình bậc hai – Tam thức bậc hai

Bài 1. Tìm m để các phương trình sau: i) có nghiệm ii) vô nghiệm

- | | |
|---|--|
| a) $(m - 5)x^2 - 4mx + m - 2 = 0$ | b) $(m - 2)x^2 + 2(2m - 3)x + 5m - 6 = 0$ |
| c) $(3 - m)x^2 - 2(m + 3)x + m + 2 = 0$ | d) $(1 + m)x^2 - 2mx + 2m = 0$ |
| e) $(m - 2)x^2 - 4mx + 2m - 6 = 0$ | f) $(-m^2 + 2m - 3)x^2 + 2(2 - 3m)x - 3 = 0$ |

Bài 2. Tìm m để các bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi x :

- | | |
|--|---|
| a) $3x^2 + 2(m - 1)x + m + 4 > 0$ | b) $x^2 + (m + 1)x + 2m + 7 > 0$ |
| c) $2x^2 + (m - 2)x - m + 4 > 0$ | d) $mx^2 + (m - 1)x + m - 1 < 0$ |
| e) $(m - 1)x^2 - 2(m + 1)x + 3(m - 2) > 0$ | f) $ 3(m + 6)x^2 - 3(m + 3)x + 2m - 3 > 3$ |

Bài 3. Tìm m để các bất phương trình sau vô nghiệm:

- | | |
|--|------------------------------------|
| a) $(m + 2)x^2 - 2(m - 1)x + 4 < 0$ | b) $(m - 3)x^2 + (m + 2)x - 4 > 0$ |
| c) $(m^2 + 2m - 3)x^2 + 2(m - 1)x + 1 < 0$ | d) $mx^2 + 2(m - 1)x + 4 \geq 0$ |
| e) $(3 - m)x^2 - 2(2m - 5)x - 2m + 5 > 0$ | f) $mx^2 - 4(m + 1)x + m - 5 < 0$ |

VẤN ĐỀ 3: Phương trình – Bất phương trình qui về bậc hai

1. Phương trình – Bất phương trình chứa ẩn trong dấu GTTĐ

Để giải phương trình, bất phương trình chứa ẩn trong dấu GTTĐ, ta thường sử dụng định nghĩa hoặc tính chất của GTTĐ để khử dấu GTTĐ.

$$\bullet \text{Dạng 1:} \quad |A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B \\ A = -B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ A = B \\ A < 0 \\ A = -B \end{cases}$$

$$\bullet \text{Dạng 2:} \quad |A| = |B| \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ A = -B \end{cases}$$

$$\bullet \text{Dạng 3:} \quad |A| < B \Leftrightarrow -B < A < B$$

$$\bullet \text{Dạng 4:} \quad |A| > B \Leftrightarrow \begin{cases} A < -B \\ A > B \end{cases}.$$

2. Phương trình – Bất phương trình chứa ẩn trong dấu căn

Để giải phương trình, bất phương trình chứa ẩn trong dấu căn ta thường dùng phép nâng lũy thừa hoặc đặt ẩn phụ để khử dấu căn.

$$\bullet \text{Dạng 1:} \quad \sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$$

$$\bullet \text{Dạng 2:} \quad \sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \text{ (hoặc } B \geq 0) \\ A = B \end{cases}$$

$$\bullet \text{Dạng 3:} \quad \sqrt{A} < B \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B > 0 \\ A < B^2 \end{cases}$$

$$\bullet \text{Dạng 4:} \quad \sqrt{A} > B \Leftrightarrow \begin{cases} B < 0 \\ A \geq 0 \\ B \geq 0 \\ A > B^2 \end{cases}$$

Bài 1. Giải các phương trình sau:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } |x^2 - 5x + 4| = x^2 + 6x + 5 & \text{b) } |x^2 - 1| = x^2 - 2x + 8 & \text{c) } |2 - 3x^2| - |6 - x^2| = 0 \\ \text{d) } 2|x| - |x - 3| = 3 & \text{e) } |x^2 - 1| = 1 - |x| & \text{f) } \frac{x^2 - 1 + |x + 1|}{|x|(x - 2)} = 2 \end{array}$$

Bài 2. Giải các bất phương trình sau:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } 2x^2 - |5x - 3| < 0 & \text{b) } x - 8 > |x^2 + 3x - 4| & \text{c) } |x^2 - 1| - 2x < 0 \\ \text{d) } |x^2 + 4x + 3| > |x^2 - 4x - 5| & \text{e) } |x - 3| - |x + 1| < 2 & \text{f) } |x^2 - 3x + 2| + x^2 > 2x \\ \text{g) } \left| \frac{x^2 - 4x}{x^2 + x + 2} \right| \leq 1 & \text{h) } \frac{2x - 5}{|x - 3|} + 1 > 0 & \text{i) } \frac{|x - 2|}{x^2 - 5x + 6} \geq 3 \end{array}$$

Bài 3. Giải các phương trình sau:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \sqrt{2x - 3} = x - 3 & \text{b) } \sqrt{5x + 10} = 8 - x & \text{c) } x - \sqrt{2x - 5} = 4 \\ \text{d) } \sqrt{x^2 + 2x + 4} = \sqrt{2 - x} & \text{e) } \sqrt{3x^2 - 9x + 1} = x - 2 & \text{f) } \sqrt{3x^2 - 9x + 1} = |x - 2| \\ \text{g) } \sqrt{3x + 7} - \sqrt{x + 1} = 2 & \text{h) } \sqrt{x^2 + 9} - \sqrt{x^2 - 7} = 2 & \text{i) } \frac{\sqrt{21 + x} + \sqrt{21 - x}}{\sqrt{21 + x} - \sqrt{21 - x}} = \frac{21}{x} \end{array}$$

Bài 4. Giải các phương trình sau: (nâng lũy thừa)

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \sqrt[3]{x + 5} + \sqrt[3]{x + 6} = \sqrt[3]{2x + 11} & \text{b) } \sqrt[3]{x + 1} + \sqrt[3]{3x + 1} = \sqrt[3]{x - 1} & \text{c) } \sqrt[3]{1 + \sqrt{x}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{x}} = 2 \end{array}$$

d) $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x+3} = 0$

Bài 5. Giải các phương trình sau: (biến đổi biểu thức dưới căn)

a) $\sqrt{x-2} + \sqrt{2x-5} + \sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}} = 7\sqrt{2}$

b) $\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}} = 1$

c) $\sqrt{2x-2\sqrt{2x-1}} - 2\sqrt{2x+3-4\sqrt{2x-1}} + 3\sqrt{2x+8-6\sqrt{2x-1}} = 4$

Bài 6. Giải các phương trình sau: (đặt ẩn phụ)

a) $x^2 - 6x + 9 = 4\sqrt{x^2 - 6x + 6}$ b) $(x+4)(x+1) - 3\sqrt{x^2 + 5x + 2} = 6$

c) $(x-3)^2 + 3x - 22 = \sqrt{x^2 - 3x + 7}$ d) $\sqrt{(x+1)(x+2)} = x^2 + 3x - 4$

Bài 7. Giải các phương trình sau: (đặt hai ẩn phụ)

a) $\sqrt{3x^2 + 5x + 8} - \sqrt{3x^2 + 5x + 1} = 1$ b) $\sqrt[3]{5x+7} - \sqrt[3]{5x-13} = 1$

c) $\sqrt[3]{9-\sqrt{x+1}} + \sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}} = 4$ d) $\sqrt[3]{24+\sqrt{x}} - \sqrt[3]{5+\sqrt{x}} = 1$

Bài 8. Giải các bất phương trình sau:

a) $\sqrt{x^2 + x - 12} < 8 - x$ b) $\sqrt{x^2 - x - 12} < 7 - x$ c) $\sqrt{-x^2 - 4x + 21} < x + 3$

d) $\sqrt{x^2 - 3x - 10} > x - 2$ e) $\sqrt{3x^2 + 13x + 4} \geq x - 2$ f) $\sqrt{2x + \sqrt{6x^2 + 1}} > x + 1$

g) $\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} > \sqrt{2x-8}$ h) $\sqrt{2-x} > \sqrt{7-x} - \sqrt{-3-2x}$ i) $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+2} \leq 1$

Bài 9. Giải các bất phương trình sau:

a) $\sqrt{(x-3)(8-x)} + 26 > -x^2 + 11x$ b) $(x+5)(x-2) + 3\sqrt{x(x+3)} > 0$

c) $(x+1)(x+4) < 5\sqrt{x^2 + 5x + 28}$ d) $\sqrt{3x^2 + 5x + 7} - \sqrt{3x^2 + 5x + 2} \geq 1$

Bài 10. Giải các bất phương trình sau:

a) $\frac{\sqrt{x^2 - 4x}}{3-x} \leq 2$ b) $\frac{\sqrt{-2x^2 - 15x + 17}}{x+3} \geq 0$

c) $(x+3)\sqrt{x^2 - 4} \leq x^2 - 9$ d) $\frac{\sqrt{-x^2 + x + 6}}{2x+5} \geq \frac{\sqrt{-x^2 + x + 6}}{x+4}$

Bài 11. Giải các bất phương trình sau:

a) $x+2 \leq \sqrt[3]{x^2+8}$ b) $\sqrt[3]{2x^2+1} \geq \sqrt[3]{3x^2-1}$ c) $\sqrt[3]{x+1} > \sqrt{x-3}$

CHƯƠNG V THỐNG KÊ

I. Một số khái niệm

- Một tập con hữu hạn các đơn vị điều tra đgl một **mẫu**.
- Số phần tử của một mẫu đgl **kích thước mẫu**.
- Các giá trị của dấu hiệu thu được trên mẫu đgl một **mẫu số liệu**.

II. Trình bày một mẫu số liệu

- **Tần số** của một giá trị là số lần xuất hiện của mỗi giá trị trong mẫu số liệu.
- **Tần suất** f_i của giá trị x_i là tỉ số giữa tần số n_i và kích thước mẫu N :

$$f_i = \frac{n_i}{N} \quad (\text{thường viết tần suất dưới dạng \%})$$

• **Bảng phân bố tần số – tần suất**

Giá trị	Tần số	Tần suất (%)
x_1	n_1	f_1
x_2	n_2	f_2
...	...	...
x_k	n_k	f_k
	N	100 (%)

• **Bảng phân bố tần số – tần suất ghép lớp**

Lớp	Tần số	Tần suất (%)
$[x_1; x_2)$	n_1	f_1
$[x_2; x_3)$	n_2	f_2
...	...	...
$[x_k; x_{k+1})$	n_k	f_k
	N	100 (%)

III. Biểu đồ

• **Biểu đồ hình cột**

• **Biểu đồ hình quạt**

• **Đường gấp khúc**

IV. Các số đặc trưng của mẫu số liệu

1. Số trung bình

- Với mẫu số liệu kích thước N là $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N}$$

- Với mẫu số liệu được cho bởi bảng phân bố tần số:

$$\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_k x_k}{N}$$

- Với mẫu số liệu được cho bởi bảng phân bố tần số ghép lớp:

$$\bar{x} = \frac{n_1 c_1 + n_2 c_2 + \dots + n_k c_k}{N} \quad (c_i \text{ là giá trị đại diện của lớp thứ } i)$$

i)

2. Số trung vị

Giả sử ta có một mẫu gồm N số liệu được sắp xếp theo thứ tự không giảm (hoặc không tăng). Khi đó **số trung vị** M_e là:

- Số đứng giữa nếu N lẻ;
- Trung bình cộng của hai số đứng giữa nếu N chẵn.

3. Mốt

Mốt của một bảng phân bố tần số là giá trị có tần số lớn nhất và được kí hiệu là M_0 .

Chú ý: – Số trung bình của mẫu số liệu được dùng làm đại diện cho các số liệu của mẫu.

– Nếu các số liệu trong mẫu có sự chênh lệch quá lớn thì dùng số trung vị làm đại diện cho các số liệu của mẫu.

– Nếu quan tâm đến giá trị có tần số lớn nhất thì dùng mốt làm đại diện. Một mẫu số liệu có thể có nhiều mốt.

4. Phương sai và độ lệch chuẩn

Đề đo mức độ chênh lệch (**độ phân tán**) giữa các giá trị của mẫu số liệu so với số trung bình ta dùng **phương sai** s^2 và **độ lệch chuẩn** $s = \sqrt{s^2}$.

- Với mẫu số liệu kích thước N là $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$:

$$s^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 - \frac{1}{N^2} \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2$$

- Với mẫu số liệu được cho bởi bảng phân bố tần số, tần suất:

$$s^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k n_i x_i^2 - \frac{1}{N^2} \left(\sum_{i=1}^k n_i x_i \right)^2$$

$$= \sum_{i=1}^k f_i (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^k f_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^k f_i x_i \right)^2$$

- Với mẫu số liệu được cho bởi bảng phân bố tần số, tần suất ghép lớp:

$$s^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k n_i (c_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k n_i c_i^2 - \frac{1}{N^2} \left(\sum_{i=1}^k n_i c_i \right)^2$$

$$= \sum_{i=1}^k f_i (c_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^k f_i c_i^2 - \left(\sum_{i=1}^k f_i c_i \right)^2$$

(c_i, n_i, f_i là giá trị đại diện, tần số, tần suất của lớp thứ i ;

N là số các số liệu thống kê $N = n_1 + n_2 + \dots + n_k$)

Chú ý: Phương sai và độ lệch chuẩn càng lớn thì độ phân tán (so với số trung bình) của các số liệu thống kê càng lớn.

Bài 21. Trong các mẫu số liệu dưới đây:

- Cho biết dấu hiệu và đơn vị điều tra là gì? Kích thước mẫu là bao nhiêu?
- Lập bảng phân bố tần số, tần suất. Nhận xét.
- Vẽ biểu đồ tần số, tần suất.
- Tính số trung bình, số trung vị, mốt.
- Tính phương sai và độ lệch chuẩn. Nhận xét.

1) Tuổi thọ của 30 bóng đèn được thắp thử (đơn vị: giờ)

1180	1150	1190	1170	1180	1170	1160	1170	1160	1150
1190	1180	1170	1170	1170	1190	1170	1170	1170	1180
1170	1160	1160	1160	1170	1160	1180	1180	1150	1170

2) Năng suất lúa hè thu (tạ/ha) năm 1998 của 31 tỉnh

30	30	25	25	35	45	40	40	35	45	
25	45	30	30	30	40	30	25	45	45	
35	35	30	40	40	40	35	35	35	35	35

3) Số con của 40 gia đình ở huyện A.

2	4	3	2	0	2	2	3	4	5
2	2	5	2	1	2	2	2	3	2
5	2	7	3	4	2	2	2	3	2
3	5	2	1	2	4	4	3	4	3

4) Điện năng tiêu thụ trong một tháng (kW/h) của 30 gia đình ở một khu phố A.

165	85	65	65	70	50	45	100	45	100
100	100	100	90	53	70	141	42	50	150
40	70	84	59	75	57	133	45	65	75

5) Số học sinh giỏi của 30 lớp ở một trường THPT.

0	2	1	0	0	3	0	0	1	1	0	1	6	6	0
1	5	2	4	5	1	0	1	2	4	0	3	3	1	0

6) Nhiệt độ của 24 tỉnh, thành phố ở Việt Nam vào một ngày của tháng 7 (đơn vị: độ)

36	30	31	32	31	40	37	29	41	37	35	34
34	35	32	33	35	33	33	31	34	34	32	35

6) Tốc độ (km/h) của 30 chiếc xe mô tô ghi ở một trạm kiểm soát giao thông.

40	58	60	75	45	70	60	49	60	75
52	41	70	65	60	42	80	65	58	55

65	75	40	55	68	70	52	55	60	70
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

7) Kết quả điểm thi môn Văn của hai lớp 10A, 10B ở một trường THPT.

Lớp 10A	Điểm thi	5	6	7	8	9	10	Cộng
	Tần số	1	9	12	14	1	3	40

Lớp 10B	Điểm thi	6	7	8	9	Cộng
	Tần số	8	18	10	4	40

8) Tiền lương hàng tháng của 30 công nhân ở một xưởng may.

Tiền lương	300	500	700	800	900	1000	Cộng
Tần số	3	5	6	5	6	5	30

9) Một nhà nghiên cứu ghi lại tuổi của 30 bệnh nhân mắc bệnh đau mắt hột.

21	17	22	18	20	17	15	13	15	20	15	12	18	17	25
17	21	15	12	18	16	23	14	18	19	13	16	19	18	17

10) Năng suất lúa (đơn vị: tạ/ha) của 120 thửa ruộng ở một cánh đồng.

Năng suất	30	32	34	36	38	40	42	44
Tần số	10	20	30	15	10	10	5	20

Bài 22. Trong các mẫu số liệu dưới đây:

- Cho biết dấu hiệu và đơn vị điều tra là gì? Kích thước mẫu là bao nhiêu?
- Lập bảng phân bố tần số, tần suất ghép lớp. Nhận xét.
- Vẽ biểu đồ tần số, tần suất.
- Tính số trung bình, số trung vị, mốt.
- Tính phương sai và độ lệch chuẩn. Nhận xét.

1) Khối lượng của 30 củ khoai tây thu hoạch được ở nông trường T (đơn vị: g).

90	73	88	99	100	102	101	96	79	93
81	94	96	93	95	82	90	106	103	116
109	108	112	87	74	91	84	97	85	92

Với các lớp: [70; 80), [80; 90), [90; 100), [100; 110), [110; 120].

2) Chiều cao của 35 cây bạch đàn (đơn vị: m).

6,6	7,5	8,2	8,2	7,8	7,9	9,0	8,9	8,2	7,2	7,5	8,3
7,4	8,7	7,7	7,0	9,4	8,7	8,0	7,7	7,8	8,3	8,6	8,1
8,1	9,5	6,9	8,0	7,6	7,9	7,3	8,5	8,4	8,0	8,8	

Với các lớp: [6,5; 7,0), [7,0; 7,5), [7,5; 8,0), [8,0; 8,5), [8,5; 9,0), [9,0; 9,5].

3) Số phiếu dự đoán đúng của 25 trận bóng đá học sinh.

54	75	121	142	154	159	171	189	203	211	225	247	251
259	264	278	290	305	315	322	355	367	388	450	490	

Với các lớp: [50; 124], [125; 199], ... (độ dài mỗi đoạn là 74).

4) Doanh thu của 50 cửa hàng của một công ti trong một tháng (đơn vị: triệu đồng).

102	121	129	114	95	88	109	147	118	148	128	71	93
67	62	57	103	135	97	166	83	114	66	156	88	64
49	101	79	120	75	113	155	48	104	112	79	87	88
141	55	123	152	60	83	144	84	95	90	27		

Với các lớp: [26,5; 48,5), [48,5; 70,5), ... (độ dài mỗi khoảng là 22).

5) Điểm thi môn Toán của 60 học sinh lớp 10.

1	5	4	8	2	9	4	5	3	2	7	2	7	10	0
2	6	3	7	5	9	10	10	7	9	0	5	3	8	2
4	1	3	6	0	10	3	3	0	8	6	4	1	6	8
2	5	2	1	5	1	8	5	7	2	4	6	3	4	2

Với các lớp: [0;2), [2; 4), ..., [8;10].

6) Số điện tiêu thụ của 30 hộ ở một khu dân cư trong một tháng như sau (đơn vị: kW):

50	47	30	65	63	70	38	34	48	53	33	39	32	40	50
55	50	61	37	37	43	35	65	60	31	33	41	45	55	59

Với các lớp: [30;35), [35; 40), ..., [65;70].

7) Số cuộn phim mà 40 nhà nhiếp ảnh nghiệp dư sử dụng trong một tháng.

5	3	3	1	4	3	4	3	6	8	4	2	4	6
8	9	6	2	10	11	15	1	2	5	13	7	7	2
4	9	3	8	8	10	14	16	17	6	6	12		

Với các lớp: [0; 2], [3; 5], ..., [15; 17].

8) Số người đến thư viện đọc sách buổi tối trong 30 ngày của tháng 9 ở một thư viện.

85	81	65	58	47	30	51	92	85	42	55	37	31	82	63
33	44	93	77	57	44	74	63	67	46	73	52	53	47	35

Với các lớp: [25; 34], [35; 44], ..., [85; 94] (độ dài mỗi đoạn bằng 9).

9) Số tiền điện phải trả của 50 gia đình trong một tháng ở một khu phố (đơn vị: nghìn đồng)

Lớp	[375; 449]	[450; 524]	[525; 599]	[600; 674]	[675; 749]	[750; 825]
Tần số	6	15	10	6	9	4

10) Khối lượng của 30 củ khoai tây thu hoạch ở một nông trường (đơn vị: gam).

Lớp	[70; 80)	[80; 90)	[90; 100)	[100; 110)	[110; 120)
Tần số	3	6	12	6	3

CHƯƠNG VI

GÓC – CUNG LƯỢNG GIÁC

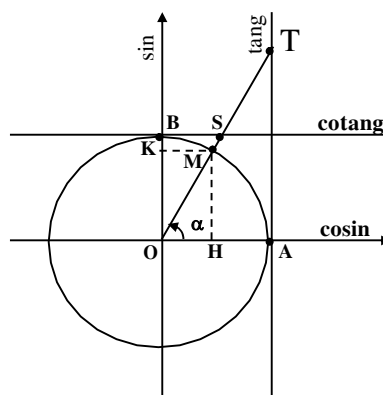
CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

I. Giá trị lượng giác của góc (cung) lượng giác

1. Định nghĩa các giá trị lượng giác

Cho $(OA, OM) = \alpha$. Giả sử $M(x; y)$.

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= x = \overline{OH} \\ \sin \alpha &= y = \overline{OK} \\ \tan \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \overline{AT} \quad \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \right) \\ \cot \alpha &= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \overline{BS} \quad (\alpha \neq k\pi)\end{aligned}$$



Nhận xét:

- $\forall \alpha, -1 \leq \cos \alpha \leq 1; -1 \leq \sin \alpha \leq 1$
- $\tan \alpha$ xác định khi $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\cot \alpha$ xác định khi $\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\sin(\alpha + k2\pi) = \sin \alpha$
- $\tan(\alpha + k\pi) = \tan \alpha$
- $\cos(\alpha + k2\pi) = \cos \alpha$
- $\cot(\alpha + k\pi) = \cot \alpha$

2. Dấu của các giá trị lượng giác

Phần tư	I	II	III	IV
Giá trị lượng giác				
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\tan \alpha$	+	-	+	-
$\cot \alpha$	+	-	+	-

3. Giá trị lượng giác của các góc đặc biệt

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	180^0	270^0	360^0
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	0	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	0		0
cot		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1		0	

4. Hệ thức cơ bản:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \quad \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1; \quad 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}; \quad 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

5. Giá trị lượng giác của các góc có liên quan đặc biệt

Góc đối nhau	Góc bù nhau	Góc phụ nhau
$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$	$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$
$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$	$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$
$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$	$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$
$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$	$\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$	$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$

Góc hơn kém π	Góc hơn kém $\frac{\pi}{2}$
$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$
$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$
$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha$
$\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$	$\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha$

II. Công thức lượng giác

1. Công thức cộng

$$\begin{aligned}\sin(a+b) &= \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a \\ \sin(a-b) &= \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a \\ \cos(a+b) &= \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b \\ \cos(a-b) &= \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan(a+b) &= \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b} \\ \tan(a-b) &= \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}\end{aligned}$$

Hệ quả: $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha}, \quad \tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha}$

2. Công thức nhân đôi

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}; \quad \cot 2\alpha = \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha}$$

Công thức hạ bậc	Công thức nhân ba (*)
$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$	$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$
$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$	$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$
$\tan^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$	$\tan 3\alpha = \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha}$

3. Công thức biến đổi tổng thành tích

$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$	$\tan a + \tan b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cdot \cos b}$
$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$	$\tan a - \tan b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cdot \cos b}$
$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$	$\cot a + \cot b = \frac{\sin(a+b)}{\sin a \cdot \sin b}$
$\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$	$\cot a - \cot b = \frac{\sin(b-a)}{\sin a \cdot \sin b}$
$\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \cdot \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cdot \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$ $\sin \alpha - \cos \alpha = \sqrt{2} \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$	

4. Công thức biến đổi tích thành tổng

$$\begin{aligned}\cos a \cdot \cos b &= \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)] \\ \sin a \cdot \sin b &= \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)] \\ \sin a \cdot \cos b &= \frac{1}{2} [\sin(a-b) + \sin(a+b)]\end{aligned}$$

VẤN ĐỀ 1: Dấu của các giá trị lượng giác

Để xác định dấu của các giá trị lượng giác của một cung (góc) ta xác định điểm nhọn của cung (tia cuối của góc) thuộc góc phần tư nào và áp dụng bảng xét dấu các GTLG.

Bài 23. Xác định dấu của các biểu thức sau:

a) $A = \sin 50^\circ \cdot \cos(-300^\circ)$

b) $B = \sin 215^\circ \cdot \tan \frac{21\pi}{7}$

c) $C = \cot \frac{3\pi}{5} \cdot \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

d) $D = \cos \frac{4\pi}{5} \cdot \sin \frac{\pi}{3} \cdot \tan \frac{4\pi}{3} \cdot \cot \frac{9\pi}{5}$

Bài 24. Cho $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Xét dấu của các biểu thức sau:

a) $A = \sin(\alpha + 90^\circ)$

b) $B = \cos(\alpha - 45^\circ)$

c) $C = \cos(270^\circ - \alpha)$

d) $D = \cos(2\alpha + 90^\circ)$

Bài 25. Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Xét dấu của các biểu thức sau:

a) $A = \cos(\alpha + \pi)$

b) $B = \tan(\alpha - \pi)$

c) $C = \sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{5}\right)$

d) $D = \cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{8}\right)$

Bài 26. Cho tam giác ABC. Xét dấu của các biểu thức sau:

a) $A = \sin A + \sin B + \sin C$

b) $B = \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$

c) $C = \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}$

d) $D = \tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2}$

VẤN ĐỀ 2: Tính các giá trị lượng giác của một góc (cung)

Ta sử dụng các hệ thức liên quan giữa các giá trị lượng giác của một góc, để từ giá trị lượng giác đã biết suy ra các giá trị lượng giác chưa biết.

I. Cho biết một GTLG, tính các GTLG còn lại

1. Cho biết $\sin \alpha$, tính $\cos \alpha$, $\tan \alpha$, $\cot \alpha$

• Từ $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$.

– Nếu α thuộc góc phần tư I hoặc IV thì $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$.

– Nếu α thuộc góc phần tư II hoặc III thì $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$.

• Tính $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$; $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$.

2. Cho biết $\cos \alpha$, tính $\sin \alpha$, $\tan \alpha$, $\cot \alpha$

• Từ $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$.

– Nếu α thuộc góc phần tư I hoặc II thì $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$.

– Nếu α thuộc góc phần tư III hoặc IV thì $\sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$.

• Tính $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$; $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$.

3. Cho biết $\tan \alpha$, tính $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\cot \alpha$

• Tính $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$.

• Từ $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$.

– Nếu α thuộc góc phần tư I hoặc IV thì $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$.

– Nếu α thuộc góc phần tư II hoặc III thì $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$.

• Tính $\sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha$.

4. Cho biết $\cot \alpha$, tính $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$

• Tính $\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha}$.

• Từ $\frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \cot^2 \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}}$.

– Nếu α thuộc góc phần tư I hoặc II thì $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}}$.

– Nếu α thuộc góc phần tư III hoặc IV thì $\sin \alpha = -\frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}}$.

II. Cho biết một giá trị lượng giác, tính giá trị của một biểu thức

• Cách 1: Từ GTLG đã biết, tính các GTLG có trong biểu thức, rồi thay vào biểu thức.

• Cách 2: Biến đổi biểu thức cần tính theo GTLG đã biết

III. Tính giá trị một biểu thức lượng giác khi biết tổng – hiệu các GTLG

Ta thường sử dụng các hằng đẳng thức để biến đổi:

$$A^2 + B^2 = (A + B)^2 - 2AB$$

$$A^4 + B^4 = (A^2 + B^2)^2 - 2A^2B^2$$

$$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$$

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$$

IV. Tính giá trị của biểu thức bằng cách giải phương trình

• Đặt $t = \sin^2 x$, $0 \leq t \leq 1 \Rightarrow \cos^2 x = t$. Thế vào giả thiết, tìm được t .

Biểu diễn biểu thức cần tính theo t và thay giá trị của t vào để tính.

• Thiết lập phương trình bậc hai: $t^2 - St + P = 0$ với $S = x + y$; $P = xy$. Từ đó tìm x, y .

Bài 1. Cho biết một GTLG, tính các GTLG còn lại, với:

a) $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, $270^\circ < \alpha < 360^\circ$

b) $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$

c) $\sin \alpha = \frac{5}{13}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

d) $\sin \alpha = -\frac{1}{3}$, $180^\circ < \alpha < 270^\circ$

e) $\tan \alpha = 3$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

f) $\tan \alpha = -2$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

g) $\cot 15^\circ = 2 + \sqrt{3}$

h) $\cot \alpha = 3$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

Bài 2. Cho biết một GTLG, tính giá trị của biểu thức, với:

a) $A = \frac{\cot a + \tan a}{\cot a - \tan a}$ khi $\sin a = \frac{3}{5}$, $0 < a < \frac{\pi}{2}$

ĐS: $\frac{25}{7}$

b) $B = \frac{8 \tan^2 a + 3 \cot a - 1}{\tan a + \cot a}$ khi $\sin a = \frac{1}{3}$, $90^\circ < a < 180^\circ$

ĐS: $\frac{8}{3}$

$$c) C = \frac{\sin^2 a + 2 \sin a \cdot \cos a - 2 \cos^2 a}{2 \sin^2 a - 3 \sin a \cdot \cos a + 4 \cos^2 a} \text{ khi } \cot a = -3 \quad DS: -\frac{23}{47}$$

$$d) D = \frac{\sin a + 5 \cos a}{\sin^3 a - 2 \cos^3 a} \text{ khi } \tan a = 2 \quad DS: \frac{55}{6}$$

$$e) E = \frac{8 \cos^3 a - 2 \sin^3 a + \cos a}{2 \cos a - \sin^3 a} \text{ khi } \tan a = 2 \quad DS: -\frac{3}{2}$$

$$g) G = \frac{\cot a + 3 \tan a}{2 \cot a + \tan a} \text{ khi } \cos a = -\frac{2}{3} \quad DS: \frac{19}{13}$$

$$h) H = \frac{\sin a + \cos a}{\cos a - \sin a} \text{ khi } \tan a = 5 \quad DS: -\frac{3}{2}$$

Bài 3. Cho $\sin a + \cos a = \frac{5}{4}$. Tính giá trị các biểu thức sau:

$$a) A = \sin a \cdot \cos a \quad b) B = \sin a - \cos a \quad c) C = \sin^3 a - \cos^3 a$$

$$DS: a) \frac{9}{32} \quad b) \pm \frac{\sqrt{7}}{4} \quad c) \pm \frac{41\sqrt{7}}{128}$$

Bài 4. Cho $\tan a - \cot a = 3$. Tính giá trị các biểu thức sau:

$$a) A = \tan^2 a + \cot^2 a \quad b) B = \tan a + \cot a \quad c) C = \tan^4 a - \cot^4 a$$

$$DS: a) 11 \quad b) \pm\sqrt{13} \quad c) \pm 33\sqrt{13}$$

Bài 5.

$$a) \text{ Cho } 3 \sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4}. \text{ Tính } A = \sin^4 x + 3 \cos^4 x. \quad DS: A = \frac{7}{4}$$

$$b) \text{ Cho } 3 \sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2}. \text{ Tính } B = \sin^4 x + 3 \cos^4 x. \quad DS: B = 1$$

$$c) \text{ Cho } 4 \sin^4 x + 3 \cos^4 x = \frac{7}{4}. \text{ Tính } C = 3 \sin^4 x + 4 \cos^4 x. \quad DS: C = \frac{7}{4} \vee C = \frac{57}{28}$$

Bài 6.

$$a) \text{ Cho } \sin x + \cos x = \frac{1}{5}. \text{ Tính } \sin x, \cos x, \tan x, \cot x.$$

$$b) \text{ Cho } \tan x + \cot x = 4. \text{ Tính } \sin x, \cos x, \tan x, \cot x.$$

VẤN ĐỀ 3: Tính giá trị lượng giác của biểu thức bằng các cung liên kết

Sử dụng công thức các góc (cung) có liên quan đặc biệt (cung liên kết).

Bài 1. Tính các GTLG của các góc sau:

$$a) 120^0; 135^0; 150^0; 210^0; 225^0; 240^0; 300^0; 315^0; 330^0; 390^0; 420^0; 495^0; 2550^0$$

$$b) 9\pi; 11\pi; \frac{7\pi}{2}; \frac{13\pi}{4}; -\frac{5\pi}{4}; \frac{10\pi}{3}; -\frac{5\pi}{3}; \frac{11\pi}{3}; -\frac{16\pi}{3}; \frac{13\pi}{6}; \frac{29\pi}{6}; -\frac{31\pi}{4}$$

Bài 2. Rút gọn các biểu thức sau:

$$a) A = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos(2\pi - x) + \cos(3\pi + x)$$

$$b) B = 2 \cos x - 3 \cos(\pi - x) + 5 \sin\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) + \cot\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$$

$$c) C = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin(5\pi - x) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$d) D = \cos(5\pi - x) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cot(3\pi - x)$$

Bài 3. Rút gọn các biểu thức sau:

$$a) A = \frac{\sin(-328^0) \cdot \sin 958^0}{\cot 572^0} - \frac{\cos(-508^0) \cdot \cos(-1022^0)}{\tan(-212^0)} \quad \text{ĐS: } A = -1$$

$$b) B = \frac{\sin(-234^0) - \cos 216^0}{\sin 144^0 - \cos 126^0} \cdot \tan 36^0 \quad \text{ĐS: } B = -1$$

$$c) C = \cos 20^0 + \cos 40^0 + \cos 60^0 + \dots + \cos 160^0 + \cos 180^0 \quad \text{ĐS: } C = -1$$

$$d) D = \cos^2 10^0 + \cos^2 20^0 + \cos^2 30^0 + \dots + \cos^2 180^0 \quad \text{ĐS: } D = 9$$

$$e) E = \sin 20^0 + \sin 40^0 + \sin 60^0 + \dots + \sin 340^0 + \sin 360^0 \quad \text{ĐS: } E = 0$$

$$f) 2 \sin(790^0 + x) + \cos(1260^0 - x) + \tan(630^0 + x) \cdot \tan(1260^0 - x) \quad \text{ĐS: } F = 1 + \cos x$$

VẤN ĐỀ 4: Rút gọn biểu thức lượng giác – Chứng minh đẳng thức lượng giác

Sử dụng các hệ thức cơ bản, công thức lượng giác để biến đổi biểu thức lượng giác. Trong khi biến đổi biểu thức, ta thường sử dụng các hằng đẳng thức.

Chú ý: Nếu là biểu thức lượng giác đối với các góc A, B, C trong tam giác ABC thì:

$$A + B + C = \pi \quad \text{và} \quad \frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Bài 1. Chứng minh các đẳng thức sau:

$$a) \sin^4 x - \cos^4 x = 1 - 2 \cos^2 x$$

$$b) \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \cos^2 x \cdot \sin^2 x$$

$$c) \sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3 \sin^2 x \cdot \cos^2 x$$

$$d) \sin^8 x + \cos^8 x = 1 - 4 \sin^2 x \cdot \cos^2 x + 2 \sin^4 x \cdot \cos^4 x$$

$$e) \cot^2 x - \cos^2 x = \cos^2 x \cdot \cot^2 x$$

$$f) \tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \cdot \sin^2 x$$

$$g) 1 + \sin x + \cos x + \tan x = (1 + \cos x)(1 + \tan x)$$

$$h) \sin^2 x \cdot \tan x + \cos^2 x \cdot \cot x + 2 \sin x \cdot \cos x = \tan x + \cot x$$

$$i) \frac{\sin x + \cos x - 1}{1 - \cos x} = \frac{2 \cos x}{\sin x - \cos x + 1}$$

$$k) \frac{1 + \sin^2 x}{1 - \sin^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

Bài 2. Chứng minh các đẳng thức sau:

$$a) \tan a \cdot \tan b = \frac{\tan a + \tan b}{\cot a + \cot b}$$

$$b) \frac{\sin a}{\sin a - \cos a} - \frac{\cos a}{\cos a - \sin a} = \frac{1 + \cot^2 a}{1 - \cot^2 a}$$

$$c) 1 - \frac{\sin^2 a}{1 + \cot a} - \frac{\cos^2 a}{1 + \tan a} = \sin a \cdot \cos a$$

$$d) \frac{\sin^2 a}{\sin a - \cos a} - \frac{\sin a + \cos a}{\tan^2 a - 1} = \sin a + \cos a$$

$$e) \frac{1 + \cos a}{\sin a} \left[1 - \frac{(1 - \cos a)^2}{\sin^2 a} \right] = 2 \cot a$$

$$f) \frac{\tan^2 a}{1 + \tan^2 a} \cdot \frac{1 + \cot^2 a}{\cot^2 a} = \frac{1 + \tan^4 a}{\tan^2 a + \cot^2 a}$$

$$\begin{aligned} \text{g)} \left(\sqrt{\frac{1+\sin a}{1-\sin a}} - \sqrt{\frac{1-\sin a}{1+\sin a}} \right)^2 &= 4 \tan^2 a & \text{h)} \frac{\tan^2 a - \tan^2 b}{\tan^2 a \cdot \tan^2 b} &= \frac{\sin^2 a - \sin^2 b}{\sin^2 a \cdot \sin^2 b} \\ \text{i)} \frac{\sin^2 a - \tan^2 a}{\cos^2 a - \cot^2 a} &= \tan^6 a & \text{k)} \frac{\tan^3 a}{\sin^2 a} - \frac{1}{\sin a \cdot \cos a} + \frac{\cot^3 a}{\cos^2 a} &= \tan^3 a + \cot^3 a \end{aligned}$$

Bài 3. Cho $\frac{\sin^4 x}{a} + \frac{\cos^4 a}{b} = \frac{1}{a+b}$, với $a, b > 0$. Chứng minh: $\frac{\sin^8 x}{a^3} + \frac{\cos^8 x}{b^3} = \frac{1}{(a+b)^3}$.

Bài 4. Rút gọn các biểu thức sau:

$$\begin{aligned} \text{a)} (1 - \sin^2 x) \cot^2 x + 1 - \cot^2 x & \quad \text{b)} (\tan x + \cot x)^2 - (\tan x - \cot x)^2 \\ \text{c)} \frac{\cos^2 x + \cos^2 x \cdot \cot^2 x}{\sin^2 x + \sin^2 x \cdot \tan^2 x} & \quad \text{d)} (x \cdot \sin a - y \cdot \cos a)^2 + (x \cdot \cos a + y \cdot \sin a)^2 \\ \text{e)} \frac{\sin^2 x - \tan^2 x}{\cos^2 a - \cot^2 x} & \quad \text{f)} \frac{\sin^2 x - \cos^2 x + \cos^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x + \sin^4 x} \\ \text{g)} \sqrt{\sin^2 x (1 + \cot x) + \cos^2 x (1 + \tan x)} & \quad \text{h)} \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}} - \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}; \quad x \in (0, \pi) \\ \text{i)} \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} + \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}; \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) & \quad \text{k)} \cos x - \sqrt{\tan^2 x - \sin^2 x}; \quad x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Bài 5. Chứng minh các biểu thức sau độc lập đối với x :

$$\begin{aligned} \text{a)} 3(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2(\sin^6 x + \cos^6 x) & \quad \text{ĐS: } 1 \\ \text{b)} 3(\sin^8 x - \cos^8 x) + 4(\cos^6 x - 2\sin^6 x) + 6\sin^4 x & \quad \text{ĐS: } 1 \\ \text{c)} (\sin^4 x + \cos^4 x - 1)(\tan^2 x + \cot^2 x + 2) & \quad \text{ĐS: } -2 \\ \text{d)} \cos^2 x \cdot \cot^2 x + 3\cos^2 x - \cot^2 x + 2\sin^2 x & \quad \text{ĐS: } 2 \\ \text{e)} \frac{\sin^4 x + 3\cos^4 x - 1}{\sin^6 x + \cos^6 x + 3\cos^4 x - 1} & \quad \text{ĐS: } \frac{2}{3} \\ \text{f)} \frac{\tan^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} + \frac{\cot^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x} & \quad \text{ĐS: } 2 \\ \text{g)} \frac{\sin^6 x + \cos^6 x - 1}{\sin^4 x + \cos^4 x - 1} & \quad \text{ĐS: } \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Bài 6. Cho tam giác ABC. Chứng minh:

$$\begin{aligned} \text{a)} \sin B &= \sin(A+C) & \text{b)} \cos(A+B) &= -\cos C \\ \text{c)} \sin \frac{A+B}{2} &= \cos \frac{C}{2} & \text{d)} \cos(B-C) &= -\cos(A+2C) \\ \text{e)} \cos(A+B-C) &= -\cos 2C & \text{f)} \cos \frac{-3A+B+C}{2} &= -\sin 2A \\ \text{g)} \sin \frac{A+B+3C}{2} &= \cos C & \text{h)} \tan \frac{A+B-2C}{2} &= \cot \frac{3C}{2} \end{aligned}$$

VẤN ĐỀ 5: Công thức cộng

$\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$ $\sin(a-b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a$ $\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$ $\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$	$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$ $\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}$
--	--

$$\text{Hệ quả: } \tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha}, \quad \tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha}$$

Bài 1. Tính các giá trị lượng giác của các góc sau:

a) 15^0 ; 75^0 ; 105^0 b) $\frac{\pi}{12}$; $\frac{5\pi}{12}$; $\frac{7\pi}{12}$

Bài 2. Tính giá trị của biểu thức lượng giác, khi biết:

a) $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$ khi $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ĐS: $\frac{38 - 25\sqrt{3}}{11}$

b) $\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$ khi $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ ĐS: $\frac{(5 - 12\sqrt{3})}{26}$

c) $\cos(a + b) \cdot \cos(a - b)$ khi $\cos a = \frac{1}{3}$, $\cos b = \frac{1}{4}$ ĐS: $-\frac{119}{144}$

d) $\sin(a - b)$, $\cos(a + b)$, $\tan(a + b)$ khi $\sin a = \frac{8}{17}$, $\tan b = \frac{5}{12}$ và a, b là các góc nhọn.

ĐS: $\frac{21}{221}$; $\frac{140}{221}$; $\frac{21}{220}$.

e) $\tan a + \tan b$, $\tan a$, $\tan b$ khi $0 < a, b < \frac{\pi}{2}$, $a + b = \frac{\pi}{4}$ và $\tan a \cdot \tan b = 3 - 2\sqrt{2}$. Từ đó

suy ra a, b . ĐS: $2\sqrt{2} - 2$; $\tan a = \tan b = \sqrt{2} - 1$, $a = b = \frac{\pi}{8}$

Bài 3. Tính giá trị của các biểu thức lượng giác sau:

a) $A = \sin^2 20^\circ + \sin^2 100^\circ + \sin^2 140^\circ$ ĐS: $\frac{3}{2}$

b) $B = \cos^2 10^\circ + \cos^2 110^\circ + \cos^2 130^\circ$ ĐS: $\frac{3}{2}$

c) $C = \tan 20^\circ \cdot \tan 80^\circ + \tan 80^\circ \cdot \tan 140^\circ + \tan 140^\circ \cdot \tan 20^\circ$ ĐS: -3

d) $D = \tan 10^\circ \cdot \tan 70^\circ + \tan 70^\circ \cdot \tan 130^\circ + \tan 130^\circ \cdot \tan 190^\circ$ ĐS: -3

e) $E = \frac{\cot 225^\circ - \cot 79^\circ \cdot \cot 71^\circ}{\cot 259^\circ + \cot 251^\circ}$ ĐS: $\sqrt{3}$

f) $F = \cos^2 75^\circ - \sin^2 75^\circ$ ĐS: $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

g) $G = \frac{1 - \tan 15^\circ}{1 + \tan 15^\circ}$ ĐS: $\frac{\sqrt{3}}{3}$

h) $H = \tan 15^\circ + \cot 15^\circ$ ĐS: 4

HD: $40^0 = 60^0 - 20^0$; $80^0 = 60^0 + 20^0$; $50^0 = 60^0 - 10^0$; $70^0 = 60^0 + 10^0$

Bài 4. Chứng minh các hệ thức sau:

a) $\sin(x + y) \cdot \sin(x - y) = \sin^2 x - \sin^2 y$

b) $\tan x + \tan y = \frac{2 \sin(x + y)}{\cos(x + y) + \cos(x - y)}$

c) $\tan x \cdot \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \tan\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \tan\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) \cdot \tan x = -3$

$$d) \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 - \sqrt{3})$$

e)

$$(\cos 70^\circ + \cos 50^\circ)(\cos 230^\circ + \cos 290^\circ) + (\cos 40^\circ + \cos 160^\circ)(\cos 320^\circ + \cos 380^\circ) = 0$$

$$f) \tan x \cdot \tan 3x = \frac{\tan^2 2x - \tan^2 x}{1 - \tan^2 2x \cdot \tan^2 x}$$

Bài 5. Chứng minh các hệ thức sau, với điều kiện cho trước:

a) $2 \tan a = \tan(a+b)$ khi $\sin b = \sin a \cdot \cos(a+b)$

b) $2 \tan a = \tan(a+b)$ khi $3 \sin b = \sin(2a+b)$

c) $\tan a \cdot \tan b = -\frac{1}{3}$ khi $\cos(a+b) = 2 \cos(a-b)$

d) $\tan(a+b) \cdot \tan b = \frac{1-k}{1+k}$ khi $\cos(a+2b) = k \cos a$

HD: a) Chú ý: $b = (a+b) - a$ b) Chú ý: $b = (a+b) - a$; $2a+b = (a+b) + a$

c) Khai triển giả thiết

d) Chú ý: $a+2b = (a+b) + a$; $a = (a+b) - b$

Bài 6. Cho tam giác ABC. Chứng minh:

a) $\sin C = \sin A \cdot \cos B + \sin B \cdot \cos A$

b) $\frac{\sin C}{\cos A \cdot \cos B} = \tan A + \tan B$ ($A, B \neq 90^\circ$)

c) $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$ ($A, B, C \neq 90^\circ$)

d) $\cot A \cdot \cot B + \cot B \cdot \cot C + \cot C \cdot \cot A = 1$

e) $\tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \cdot \tan \frac{A}{2} = 1$

f) $\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = \cot \frac{A}{2} \cdot \cot \frac{B}{2} \cdot \cot \frac{C}{2}$

g) $\cot B + \frac{\cos C}{\sin B \cdot \cos A} = \cot C + \frac{\cos B}{\sin C \cdot \cos A}$ ($A \neq 90^\circ$)

h) $\cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} = \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} + \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$

i) $\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} = 1 + 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$

HD: a, b, c, d) Sử dụng $(A+B)+C = 180^\circ$ e, f) Sử dụng $\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) + \frac{C}{2} = 90^\circ$

g) $VT = VP = \tan A$ h) Khai triển $\cos\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right)$

i) Khai triển $\sin\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right)$.

Chú ý: Từ $\cos\left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right) = \sin \frac{A}{2} \Rightarrow \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} = \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}$

$$\Rightarrow \sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} = \sin^2 \frac{A}{2} + \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}$$

Bài 7. Cho tam giác A, B, C. Chứng minh:

a) $\tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt{3}$, $\forall \triangle ABC$ nhọn.

b) $\tan^2 A + \tan^2 B + \tan^2 C \geq 9$, $\forall \triangle ABC$ nhọn.

c) $\tan^6 A + \tan^6 B + \tan^6 C \geq 81, \forall \Delta ABC$ nhọn.

d) $\tan^2 \frac{A}{2} + \tan^2 \frac{B}{2} + \tan^2 \frac{C}{2} \geq 1$

e) $\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \geq \sqrt{3}$

HD: a, b, c) Sử dụng $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$ và BĐT Cô-si

d) Sử dụng $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

và $\tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \cdot \tan \frac{A}{2} = 1$

e) Khai triển $\left(\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \right)^2$ và sử dụng câu c)

VẤN ĐỀ 6: Công thức nhân

Công thức nhân đôi

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}; \quad \cot 2\alpha = \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha}$$

Công thức hạ bậc	Công thức nhân ba (*)
$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$	$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$
$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$	$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$
$\tan^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$	$\tan 3\alpha = \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha}$

Bài 27. Tính giá trị của biểu thức lượng giác, khi biết:

a) $\cos 2\alpha, \sin 2\alpha, \tan 2\alpha$ khi $\cos \alpha = -\frac{5}{13}, \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

b) $\cos 2\alpha, \sin 2\alpha, \tan 2\alpha$ khi $\tan \alpha = 2$

c) $\sin \alpha, \cos \alpha$ khi $\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

d) $\cos 2\alpha, \sin 2\alpha, \tan 2\alpha$ khi $\tan \alpha = \frac{7}{8}$

Bài 28. Tính giá trị của biểu thức sau:

a) $A = \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 80^\circ$

ĐS: $\frac{1}{16}$

b) $B = \sin 10^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ$

ĐS: $\frac{1}{8}$

c) $C = \cos \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7} \cdot \cos \frac{5\pi}{7}$

ĐS: $\frac{1}{8}$

d) $D = \cos 10^\circ \cdot \cos 50^\circ \cdot \cos 70^\circ$

ĐS: $\frac{\sqrt{3}}{8}$

e) $E = \sin 6^\circ \cdot \sin 42^\circ \cdot \sin 66^\circ \cdot \sin 78^\circ$

ĐS: $\frac{1}{16}$

$$\begin{aligned}
 \text{f) } G &= \cos \frac{2\pi}{31} \cdot \cos \frac{4\pi}{31} \cdot \cos \frac{8\pi}{31} \cdot \cos \frac{16\pi}{31} \cdot \cos \frac{32\pi}{31} & DS: \frac{1}{32} \\
 \text{h) } H &= \sin 5^\circ \cdot \sin 15^\circ \cdot \sin 25^\circ \dots \sin 75^\circ \cdot \sin 85^\circ & DS: \frac{\sqrt{2}}{512} \\
 \text{i) } I &= \cos 10^\circ \cdot \cos 20^\circ \cdot \cos 30^\circ \dots \cos 70^\circ \cdot \cos 80^\circ & DS: \frac{3}{256} \\
 \text{k) } K &= 96\sqrt{3} \sin \frac{\pi}{48} \cdot \cos \frac{\pi}{48} \cdot \cos \frac{\pi}{24} \cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{6} & DS: 9 \\
 \text{l) } L &= \cos \frac{\pi}{15} \cdot \cos \frac{2\pi}{15} \cdot \cos \frac{3\pi}{15} \cdot \cos \frac{4\pi}{15} \cdot \cos \frac{5\pi}{15} \cdot \cos \frac{6\pi}{15} \cdot \cos \frac{7\pi}{15} & DS: \frac{1}{128} \\
 \text{m) } M &= \sin \frac{\pi}{16} \cdot \cos \frac{\pi}{16} \cdot \cos \frac{\pi}{8} & DS: \frac{\sqrt{2}}{8}
 \end{aligned}$$

Bài 29. Chứng minh rằng:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } P &= \cos \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2^2} \cos \frac{a}{2^3} \dots \cos \frac{a}{2^n} = \frac{\sin a}{2^n \cdot \sin \frac{a}{2^n}} \\
 \text{b) } Q &= \cos \frac{\pi}{2n+1} \cdot \cos \frac{2\pi}{2n+1} \dots \cos \frac{n\pi}{2n+1} = \frac{1}{2^n} \\
 \text{c) } R &= \cos \frac{2\pi}{2n+1} \cdot \cos \frac{4\pi}{2n+1} \dots \cos \frac{2n\pi}{2n+1} = -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Bài 30. Chứng minh các hệ thức sau:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \sin^4 x + \cos^4 x &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x & \text{b) } \sin^6 x + \cos^6 x &= \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4x \\
 \text{c) } \sin x \cdot \cos^3 x - \cos x \cdot \sin^3 x &= \frac{1}{4} \sin 4x & \text{d) } \sin^6 \frac{x}{2} - \cos^6 \frac{x}{2} &= \frac{1}{4} \cos x (\sin^2 x - 4) \\
 \text{e) } 1 - \sin x &= 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) & \text{f) } \frac{1 - \sin^2 x}{2 \cot \left(\frac{\pi}{4} + x \right) \cdot \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - x \right)} &= 1 \\
 \text{g) } \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \cdot \frac{1 + \cos \left(\frac{\pi}{2} + x \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{2} + x \right)} &= 1 & \text{h) } \tan \left(\frac{\pi}{4} + x \right) &= \frac{1 + \sin 2x}{\cos 2x} \\
 \text{i) } \frac{\cos x}{1 - \sin x} &= \cot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) & \text{k) } \tan x \cdot \tan 3x &= \frac{\tan^2 2x - \tan^2 x}{1 - \tan^2 x \cdot \tan^2 2x} \\
 \text{l) } \tan x &= \cot x - 2 \cot x & \text{m) } \cot x + \tan x &= \frac{2}{\sin 2x} \\
 \text{n) } \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos x}}} &= \cos \frac{x}{8}, \text{ với } 0 < x < \frac{\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

VẤN ĐỀ 7: Công thức biến đổi

1. Công thức biến đổi tổng thành tích

$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$	$\tan a + \tan b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cdot \cos b}$
$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$	$\tan a - \tan b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cdot \cos b}$
$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$	$\cot a + \cot b = \frac{\sin(a+b)}{\sin a \cdot \sin b}$
$\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$	$\cot a - \cot b = \frac{\sin(b-a)}{\sin a \cdot \sin b}$

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \cdot \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cdot \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\sin \alpha - \cos \alpha = \sqrt{2} \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) = -\sqrt{2} \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right)$$

2. Công thức biến đổi tích thành tổng

$$\begin{aligned} \cos a \cdot \cos b &= \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)] \\ \sin a \cdot \sin b &= \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)] \\ \sin a \cdot \cos b &= \frac{1}{2} [\sin(a-b) + \sin(a+b)] \end{aligned}$$

Bài 1. Biến đổi thành tổng:

a) $2 \sin(a+b) \cdot \cos(a-b)$

b) $2 \cos(a+b) \cdot \cos(a-b)$

c) $4 \sin 3x \cdot \sin 2x \cdot \cos x$

d) $4 \sin \frac{13x}{2} \cdot \cos x \cdot \cos \frac{x}{2}$

e) $\sin(x+30^\circ) \cdot \cos(x-30^\circ)$

f) $\sin \frac{\pi}{5} \cdot \sin \frac{2\pi}{5}$

g) $2 \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x$

h) $8 \cos x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x$

i) $\sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \cdot \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) \cdot \cos 2x$

k) $4 \cos(a-b) \cdot \cos(b-c) \cdot \cos(c-a)$

Bài 2. Chứng minh:

a) $4 \cos x \cdot \cos \left(\frac{\pi}{3} - x \right) \cos \left(\frac{\pi}{3} + x \right) = \cos 3x$

b)

$4 \sin x \cdot \sin \left(\frac{\pi}{3} - x \right) \sin \left(\frac{\pi}{3} + x \right) = \sin 3x$

Áp dụng tính:

$A = \sin 10^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ$

$B = \cos 10^\circ \cdot \cos 50^\circ \cdot \cos 70^\circ$

$C = \sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ$

$D = \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ$

Bài 3. Biến đổi thành tích:

a) $2 \sin 4x + \sqrt{2}$

b) $3 - 4 \cos^2 x$

c) $1 - 3 \tan^2 x$

d) $\sin 2x + \sin 4x + \sin 6x$

e) $3 + 4 \cos 4x + \cos 8x$

f) $\sin 5x + \sin 6x + \sin 7x + \sin 8x$

g) $1 + \sin 2x - \cos 2x - \tan 2x$

h) $\sin^2(x+90^\circ) - 3 \cos^2(x-90^\circ)$

i) $\cos 5x + \cos 8x + \cos 9x + \cos 12x$

k) $\cos x + \sin x + 1$

Bài 4. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = \frac{\cos 7x - \cos 8x - \cos 9x + \cos 10x}{\sin 7x - \sin 8x - \sin 9x + \sin 10x}$

b) $B = \frac{\sin 2x + 2 \sin 3x + \sin 4x}{\sin 3x + 2 \sin 4x + \sin 5x}$

c) $C = \frac{1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x}{\cos x + 2 \cos^2 x - 1}$

d) $D = \frac{\sin 4x + \sin 5x + \sin 6x}{\cos 4x + \cos 5x + \cos 6x}$

Bài 5. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $A = \cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{2\pi}{5}$

b) $B = \tan \frac{\pi}{24} + \tan \frac{7\pi}{24}$

c) $C = \sin^2 70^\circ \cdot \sin^2 50^\circ \cdot \sin^2 10^\circ$

d) $D = \sin^2 17^\circ + \sin^2 43^\circ + \sin 17^\circ \cdot \sin 43^\circ$

e) $E = \frac{1}{2 \sin 10^\circ} - 2 \sin 70^\circ$

f) $F = \frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}$

g) $G = \frac{\tan 80^\circ}{\cot 25^\circ + \cot 75^\circ} - \frac{\cot 10^\circ}{\tan 25^\circ + \tan 75^\circ}$

h) $H = \tan 9^\circ - \tan 27^\circ - \tan 63^\circ + \tan 81^\circ$

ĐS: $A = \frac{1}{2}$ $B = 2(\sqrt{6} - \sqrt{3})$ $C = \frac{1}{64}$ $D = \frac{3}{4}$

$E = 1$ $F = 4$ $G = 1$ $H = 4$

Bài 6. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\sin \frac{\pi}{30} \sin \frac{7\pi}{30} \sin \frac{13\pi}{30} \sin \frac{19\pi}{30} \sin \frac{25\pi}{30}$

ĐS: $\frac{1}{32}$

b) $16 \cdot \sin 10^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ \cdot \sin 90^\circ$

ĐS: 1

c) $\cos 24^\circ + \cos 48^\circ - \cos 84^\circ - \cos 12^\circ$

ĐS: $\frac{1}{2}$

d) $\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}$

ĐS: $-\frac{1}{2}$

e) $\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7}$

ĐS: $\frac{1}{2}$

f) $\cos \frac{\pi}{9} + \cos \frac{5\pi}{9} + \cos \frac{7\pi}{9}$

ĐS: 0

g) $\cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} + \cos \frac{6\pi}{5} + \cos \frac{8\pi}{5}$

ĐS: -1

h) $\cos \frac{\pi}{11} + \cos \frac{3\pi}{11} + \cos \frac{5\pi}{11} + \cos \frac{7\pi}{11} + \cos \frac{9\pi}{11}$

ĐS: $\frac{1}{2}$

Bài 7. Chứng minh rằng:

a) $\tan 9^\circ - \tan 27^\circ - \tan 63^\circ + \tan 81^\circ = 4$

b) $\tan 20^\circ - \tan 40^\circ + \tan 80^\circ = 3\sqrt{3}$

c) $\tan 10^\circ - \tan 50^\circ + \tan 60^\circ + \tan 70^\circ = 2\sqrt{3}$

d) $\tan 30^\circ + \tan 40^\circ + \tan 50^\circ + \tan 60^\circ = \frac{8\sqrt{3}}{3} \cdot \cos 20^\circ$

e) $\tan 20^\circ + \tan 40^\circ + \tan 80^\circ + \tan 60^\circ = 8 \sin 40^\circ$

f) $\tan^6 20^\circ - 33 \tan^4 20^\circ + 27 \tan^2 20^\circ - 3 = 0$

Bài 8. Tính các tổng sau:

a) $S_1 = \cos \alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \dots + \cos(2n-1)\alpha \quad (\alpha \neq k\pi)$

b) $S_2 = \sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \sin \frac{3\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n}.$

c) $S_3 = \cos \frac{\pi}{n} + \cos \frac{3\pi}{n} + \cos \frac{5\pi}{n} + \dots + \cos \frac{(2n-1)\pi}{n}.$

d) $S_4 = \frac{1}{\cos a \cdot \cos 2a} + \frac{1}{\cos 2a \cdot \cos 3a} + \dots + \frac{1}{\cos 4a \cdot \cos 5a}, \text{ với } a = \frac{\pi}{5}.$

e) $S_5 = \left(1 + \frac{1}{\cos x}\right) \left(1 + \frac{1}{\cos 2x}\right) \left(1 + \frac{1}{\cos 3x}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{\cos 2^{n-1}x}\right)$

ĐS: $S_1 = \frac{\sin 2n\alpha}{2 \sin \alpha}; \quad S_2 = \cot \frac{\pi}{2n}; \quad S_3 = -\cos \frac{\pi}{n};$

$S_4 = \frac{\tan 5a - \tan a}{\sin a} = 1 - \sqrt{5}; \quad S_5 = \frac{\tan 2^{n-1}x}{\tan \frac{x}{2}}$

Bài 9.

a) Chứng minh rằng: $\sin^3 x = \frac{1}{4}(3 \sin x - \sin 3x) \quad (1)$

b) Thay $x = \frac{a}{3^n}$ vào (1), tính $S_n = \sin^3 \frac{a}{3} + 3 \sin^3 \frac{a}{3^2} + \dots + 3^{n-1} \sin^3 \frac{a}{3^n}.$

ĐS: $S_n = \frac{1}{4} \left(3^n \sin \frac{a}{3^n} - \sin a \right).$

Bài 10.

a) Chứng minh rằng: $\cos a = \frac{\sin 2a}{2 \sin a}.$

b) Tính $P_n = \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \dots \cos \frac{x}{2^n}.$

ĐS: $P_n = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}.$

Bài 11.

a) Chứng minh rằng: $\frac{1}{\sin x} = \cot \frac{x}{2} - \cot x.$

b) Tính $S = \frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin 2\alpha} + \dots + \frac{1}{\sin 2^{n-1}\alpha} \quad (2^{n-1}\alpha \neq k\pi) \quad \text{ĐS: } S = \cot \frac{\alpha}{2} - \cot 2^{n-1}\alpha$

Bài 12.

a) Chứng minh rằng: $\tan^2 x \cdot \tan 2x = \tan 2x - 2 \tan x.$

b) Tính $S_n = \tan^2 \frac{a}{2} \cdot \tan a + 2 \tan^2 \frac{a}{2^2} \cdot \tan \frac{a}{2} + \dots + 2^{n-1} \tan^2 \frac{a}{2^n} \cdot \tan \frac{a}{2^{n-1}}$

ĐS:

$S_n = \tan a - 2^n \tan \frac{a}{2^n}$

Bài 13. Tính $\sin^2 2x$, biết: $\frac{1}{\tan^2 x} + \frac{1}{\cot^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = 7 \quad \text{ĐS: } \frac{8}{9}$

Bài 14. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\cot x - \tan x - 2 \tan 2x = 4 \cot 4x$ b) $\frac{1 - 2 \sin^2 2x}{1 - \sin 4x} = \frac{1 + \tan 2x}{1 - \tan 2x}$

$$c) \frac{1}{\cos^6 x} - \tan^6 x = \frac{3 \tan^2 x}{\cos^2 x} + 1 \quad d) \tan 4x - \frac{1}{\cos 4x} = \frac{\sin 2x - \cos 2x}{\sin 2x + \cos 2x}$$

$$e) \tan 6x - \tan 4x - \tan 2x = \tan 2x \cdot \tan 4x \cdot \tan 6x$$

$$f) \frac{\sin 7x}{\sin x} = 1 + 2 \cos 2x + 2 \cos 4x + 2 \cos 6x$$

$$g) \cos 5x \cdot \cos 3x + \sin 7x \cdot \sin x = \cos 2x \cdot \cos 4x$$

Bài 15.

$$a) \text{ Cho } \sin(2a+b) = 5 \sin b. \text{ Chứng minh: } \frac{2 \tan(a+b)}{\tan a} = 3$$

$$b) \text{ Cho } \tan(a+b) = 3 \tan a. \text{ Chứng minh: } \sin(2a+2b) + \sin 2a = 2 \sin 2b$$

Bài 16. Cho tam giác ABC. Chứng minh:

$$a) \sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

$$b) \cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

$$c) \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$$

$$d) \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$$

$$e) \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$$

$$f) \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$$

Bài 17. Tìm các góc của tam giác ABC, biết:

$$a) B - C = \frac{\pi}{3} \text{ và } \sin B \cdot \sin C = \frac{1}{2}. \quad \text{ĐS: } B = \frac{\pi}{2}, C = \frac{\pi}{6}, A = \frac{\pi}{3}$$

$$b) B + C = \frac{2\pi}{3} \text{ và } \sin B \cdot \cos C = \frac{1 + \sqrt{3}}{4}. \quad \text{ĐS: } A = \frac{\pi}{3}, B = \frac{5\pi}{12}, C = \frac{\pi}{4}$$

Bài 18. Chứng minh điều kiện cần và đủ để tam giác ABC vuông:

$$a) \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 \quad b) \tan 2A + \tan 2B + \tan 2C = 0$$

$$c) \frac{b}{\cos B} + \frac{c}{\cos C} = \frac{a}{\sin B \cdot \sin C} \quad d) \cot \frac{B}{2} = \frac{a+c}{b}$$

Bài 19. Chứng minh điều kiện cần và đủ để tam giác ABC cân:

$$a) a \tan A + b \tan B = (a+b) \tan \frac{A+B}{2} \quad b) 2 \tan B + \tan C = \tan^2 B \cdot \tan C$$

$$c) \frac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B} = \frac{1}{2} (\tan A + \tan B) \quad d) \cot \frac{C}{2} = \frac{2 \sin A \cdot \sin B}{\sin C}$$

Bài 20. Chứng minh bất đẳng thức, từ đó suy ra điều kiện cần và đủ để tam giác ABC đều:

$$a) \sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \text{HD: Cộng } \sin \frac{\pi}{3} \text{ vào VT.}$$

$$b) \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2} \quad \text{HD: Cộng } \cos \frac{\pi}{3} \text{ vào VT.}$$

$$c) \tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt{3} \text{ (với A, B, C nhọn)}$$

$$d) \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \leq \frac{1}{8} \quad \text{HD: Biến đổi } \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C - \frac{1}{8} \text{ về dạng hằng đẳng thức.}$$

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG VI

Bài 31. Chứng minh các đẳng thức sau:

$$\begin{aligned}
\text{a)} \quad & \frac{\sin^2 x - \cos^2 x + \cos^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x + \sin^4 x} = \tan^4 x & \text{b)} \quad (\tan 2x - \tan x)(\sin 2x - \tan x) &= \tan^2 x \\
\text{c)} \quad & \tan^2 x + \cot^2 x = \frac{6 + 2 \cos 4x}{1 - \cos 4x} & \text{d)} \quad \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} - \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} &= \frac{4 \cot x}{\sin x} \\
\text{e)} \quad & 1 - \frac{\sin^2 x}{1 + \cot x} - \frac{\cos^2 x}{1 + \tan x} = \sin x \cdot \cos x & \text{f)} \quad \cos x + \cos(120^\circ - x) + \cos(120^\circ + x) &= 0 \\
\text{g)} \quad & \frac{\sqrt{2} \cos x - 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)}{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \sqrt{2} \sin x} = \tan x & \text{h)} \quad \frac{\cot^2 \frac{x}{2} - \cot^2 \frac{3x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} \cdot \cos x \cdot \left(1 + \cot^2 \frac{3x}{2}\right)} &= 8 \\
\text{i)} \quad & \cos^6 x - \sin^6 x = \cos 2x \left(1 - \frac{1}{4} \sin^2 2x\right) & \text{k)} \quad \cos^4 x - \sin^4 x + \sin 2x &= \sqrt{2} \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)
\end{aligned}$$

Bài 32. Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc vào x :

$$\begin{aligned}
\text{a)} \quad & 3(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2(\sin^6 x + \cos^6 x) \\
\text{b)} \quad & \cos^6 x + 2 \sin^4 x \cos^2 x + 3 \sin^2 x \cos^4 x + \sin^4 x \\
\text{c)} \quad & \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) \\
\text{d)} \quad & \cos^2 x + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)
\end{aligned}$$

Bài 33. a) Chứng minh: $\cot \alpha - \cot 2\alpha = \frac{1}{\sin 2\alpha}$.

$$\text{b)} \text{ Chứng minh: } \frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \frac{1}{\sin 8x} + \frac{1}{\sin 16x} = \cot x - \cot 16x.$$

Bài 34. a) Chứng minh: $\tan \alpha = \cot \alpha - 2 \cot 2\alpha$.

$$\text{b)} \text{ Chứng minh: } \frac{1}{2} \tan \frac{x}{2} + \frac{1}{2^2} \tan \frac{x}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} \tan \frac{x}{2^n} = \frac{1}{2^n} \cot \frac{x}{2^n} - \cot x.$$

Bài 35. a) Chứng minh: $\frac{1}{4 \cos^2 x} = \frac{4}{\sin^2 2x} - \frac{1}{4 \sin^2 x}$.

$$\text{b)} \text{ Chứng minh: } \frac{1}{4 \cos^2 \frac{x}{2}} + \frac{1}{4^2 \cos^2 \frac{x}{2^2}} + \dots + \frac{1}{4^n \cos^2 \frac{x}{2^n}} = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{4^n \sin^2 \frac{x}{2^n}}.$$

Bài 36. a) Chứng minh: $\sin^3 x = \frac{1}{4}(3 \sin x - \sin 3x)$.

$$\text{b)} \text{ Chứng minh: } \sin^3 \frac{x}{3} + 3 \sin^3 \frac{x}{3^2} + \dots + 3^{n-1} \sin^3 \frac{x}{3^n} = \frac{1}{4} \left(3^n \sin \frac{x}{3^n} - \sin x \right).$$

Bài 37. a) Chứng minh: $1 + \frac{1}{\cos 2\alpha} = \frac{\tan 2\alpha}{\tan \alpha}$.

$$\text{b)} \text{ Chứng minh: } \left(1 + \frac{1}{\cos 2x}\right) \left(1 + \frac{1}{\cos 2^2 x}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{\cos 2^n x}\right) = \frac{\tan 2^n x}{\tan x}.$$

Bài 38. a) Chứng minh: $\cos \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2 \sin \alpha}$.

b) Chứng minh: $\cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2^2} \dots \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}$.

Bài 39. Đơn giản các biểu thức sau:

a) $A = \tan 3^\circ \cdot \tan 17^\circ \cdot \tan 23^\circ \cdot \tan 37^\circ \cdot \tan 43^\circ \cdot \tan 57^\circ \cdot \tan 63^\circ \cdot \tan 77^\circ \cdot \tan 83^\circ$

b) $B = \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} + \cos \frac{6\pi}{5} + \cos \frac{8\pi}{5}$

c) $C = \sin \frac{11\pi}{12} \cdot \cos \frac{5\pi}{12}$

d) $D = \sin \frac{\pi}{24} \cdot \sin \frac{5\pi}{24} \cdot \sin \frac{7\pi}{24} \cdot \sin \frac{11\pi}{24}$

HD: a) $A = \tan 27^\circ$. Sử dụng $\tan x \cdot \tan(60^\circ - x) \cdot \tan(60^\circ + x) = \tan 3x$.

b) $B = -1$ c) $C = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}$ d) $D = \frac{1}{16}$

Bài 40. Chứng minh:

a) $\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}$

b) $8\sin^3 18^\circ + 8\sin^2 18^\circ = 1$

c) $8 + 4\tan \frac{\pi}{8} + 2\tan \frac{\pi}{16} + \tan \frac{\pi}{32} = \cot \frac{\pi}{32}$

d) $\frac{1}{\cos 290^\circ} + \frac{1}{\sqrt{3} \cdot \sin 250^\circ} = \frac{4}{\sqrt{3}}$

e) $\tan 30^\circ + \tan 40^\circ + \tan 50^\circ + \tan 60^\circ = \frac{8\sqrt{3}}{3} \cos 20^\circ$

f) $\cos 12^\circ + \cos 18^\circ - 4\cos 15^\circ \cdot \cos 21^\circ \cdot \cos 24^\circ = -\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

g) $\tan 20^\circ + \tan 40^\circ + \sqrt{3} \cdot \tan 20^\circ \cdot \tan 40^\circ = \sqrt{3}$

h) $\cos \frac{\pi}{11} + \cos \frac{3\pi}{11} + \dots + \cos \frac{9\pi}{11} = \frac{1}{2}$

i) $\cos \frac{2\pi}{11} + \cos \frac{4\pi}{11} + \dots + \cos \frac{10\pi}{11} = -\frac{1}{2}$

Bài 41. a) Chứng minh: $\sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x = \frac{1}{8} \sin 8x$.

b) Áp dụng tính: $A = \sin 6^\circ \cdot \sin 42^\circ \cdot \sin 66^\circ \cdot \sin 78^\circ$, $B = \cos \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{3\pi}{7} \cdot \cos \frac{5\pi}{7}$.

Bài 42. a) Chứng minh: $\sin^4 x = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x$.

b) Áp dụng tính: $S = \sin^4 \frac{\pi}{16} + \sin^4 \frac{3\pi}{16} + \sin^4 \frac{5\pi}{16} + \sin^4 \frac{7\pi}{16}$. ĐS: $S = \frac{3}{2}$

Bài 43. a) Chứng minh: $\tan x = \frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x}$.

b) Áp dụng tính: $S = \tan^2 \frac{\pi}{12} + \tan^2 \frac{3\pi}{12} + \tan^2 \frac{5\pi}{12}$.

Bài 44. Không dùng máy tính, hãy tính giá trị các biểu thức sau:

a) $\sin 18^\circ, \cos 18^\circ$ b) $A = \cos^2 18^\circ \cdot \sin^2 36^\circ - \cos 36^\circ \cdot \sin 18^\circ$

c) $B = \sin^2 24^\circ - \sin^2 6^\circ$

d) $C = \sin 2^\circ \cdot \sin 18^\circ \cdot \sin 22^\circ \cdot \sin 38^\circ \cdot \sin 42^\circ \cdot \sin 58^\circ \cdot \sin 62^\circ \cdot \sin 78^\circ \cdot \sin 82^\circ$

HD: a) $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Chú ý: $\sin 54^\circ = \cos 36^\circ \Rightarrow \sin(3 \cdot 18^\circ) = \cos(2 \cdot 18^\circ)$

b) $A = \frac{1}{16}$ c) $B = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

d) $C = \frac{\sqrt{5}-1}{1024}$. Sử dụng: $\sin x \cdot \sin(60^\circ - x) \cdot \sin(60^\circ + x) = \frac{1}{4} \sin 3x$

Bài 45. Chứng minh rằng:

a) Nếu $\cos(a+b) = 0$ thì $\sin(a+2b) = \sin a$.

b) Nếu $\sin(2a+b) = 3 \sin b$ thì $\tan(a+b) = 2 \tan a$.

Bài 46. Chứng minh rằng trong tam giác ABC, ta có:

a) $b \cos B + c \cos C = a \cos(B-C)$ b) $S = 2R^2 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$

c) $2S = R(a \cos A + b \cos B + c \cos C)$ d) $r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$

Bài 47. Chứng minh rằng:

a) Nếu $\sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}$ thì tam giác ABC vuông tại A.

b) Nếu $\frac{\tan B}{\tan C} = \frac{\sin^2 B}{\sin^2 C}$ thì tam giác ABC vuông hoặc cân.

c) Nếu $\frac{\sin B}{\sin C} = 2 \cos A$ thì tam giác ABC cân.